Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 18 septembre 2023**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°1

Partie A.

Soit x un réel fixé non multiple de π, et pour tout entier strictement positif n :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx)$$

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n(x) = \frac{\cos((n-1)x)\sin(nx)}{\sin x}$$

2. Autre méthode :
   (a) Transformer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le produit $\sin x \cos(2kx)$ en somme de fonctions trigonométriques.
   (b) En déduire par télescopage une formule pour $(\sin x)S_n(x)$, puis retrouver la formule pour $S_n(x)$.

Partie B.

1. (a) Écrire la formule de la partie précédente pour $n = 5$ et $x = \frac{\pi}{5}$.
   (b) En déduire une formule reliant $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.
   (c) Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine du polynôme $4X^2 + 2X - 1$.
2. (a) Calculer la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
   (b) Calculer les valeurs de $\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.
   Donner celles-ci sous la forme $\frac{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}{d}$ où a, b, c, d sont des entiers.
3. Calculer les cosinus, sinus et tangente de $\frac{\pi}{10}$ puis de $\frac{\pi}{5}$.
   En donner des expressions aussi simples que les précédentes.