

III. Dérivation

A. Définitions

Rappel sur les droites du plan.

- L'équation d'une droite est de la forme $y = ax + b$ ou $x = b$.
- Le vecteur de coordonnées $(1, a)$ ou $(0, 1)$ est directeur de la droite.
- Pour tracer la droite d'équation $y = ax + b$ on place le point $(0, b)$ puis on utilise le vecteur directeur.
- Si deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont donnés, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. La valeur de b est calculée ensuite.

▷ Exercices 4, 5.

On note toujours D une partie de \mathbb{R} .

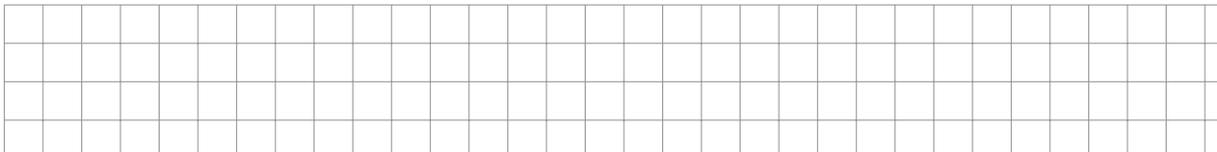
Définition. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et x_0 un élément de D . On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

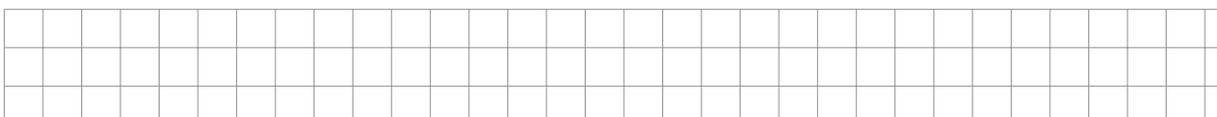


On note alors :



Ce réel est appelé nombre dérivé de f en x_0 .

Proposition. La tangente à la courbe \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse x_0 admet pour équation :



Définition. On dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable ou dérivable sur D si elle est dérivable en tout point x_0 de D .

Dans ce cas la fonction $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée dérivée de f .

$$x \mapsto f'(x)$$

Proposition. Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition sauf :

- La fonction racine carrée qui est définie (et continue) sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction valeur absolue qui est définie (et continue) sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* .
- Les fonctions arccos et arcsin qui sont définies (et continues) sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $] -1, 1[$.

Exemple 10. La fonction carré est dérivable.

▷ Exercices 6, 7.

B. Applications : croissance et extrema

Proposition. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors

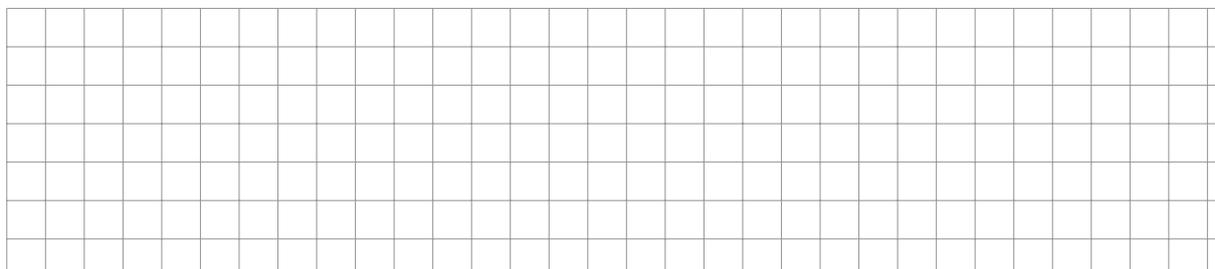
- f' est positive si et seulement si f est croissante.
- f' est négative si et seulement si f est décroissante.
- f' est nulle si et seulement si f est constante.
- Si f' est strictement positive alors f est strictement croissante.
- Si f' est strictement négative alors f est strictement décroissante.

Proposition. Avec les mêmes notations :

- Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.
- Si f' est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Démonstration du (i). Si f' est positive alors f est croissante.

Si f n'est pas strictement croissante alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.



Pour tout élément x de $[x_1, x_2]$, comme $x_1 \leq x \leq x_2$ alors par croissance $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$. Ainsi f est constante sur $[x_1, x_2]$, donc sa dérivée y est nulle. Or l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient une infinité de points, ce qui constitue une contradiction. \square

C. Dérivées usuelles**Proposition (Dérivées des fonctions usuelles).**

<i>Fonction</i>	\mathcal{D}	\mathcal{D}'	<i>Dérivée</i>	<i>Fonction</i>	\mathcal{D}	\mathcal{D}'	<i>Dérivée</i>
C				$\cos x$			
$x^n (n \in \mathbb{N})$				$\sin x$			
$\frac{1}{x}$				$\tan x$			
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$				$\arcsin x$			
\sqrt{x}				$\arccos x$			
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$				$\arctan x$			
$ x $				$\operatorname{ch} x$			
e^x				$\operatorname{sh} x$			
$\ln x$				$\operatorname{th} x$			

B. Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux points de I , tels que $a < b$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Corollaire. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démonstration du corollaire. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du corollaire. Soit d compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Comme f est continue alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c) = f(c') = d$.

Si $c < c'$ ou $c > c'$ alors $f(c) < f(c')$ ou $f(c) > f(c')$, ce qui est impossible car $f(c) = f(c')$. Donc $c = c'$.

Ceci démontre l'unicité du point c . □

V. Fonctions classiques

A. Fonctions polynomiales

Définition. Une fonction polynomiale est une fonction de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

où n est un entier naturel, et a_0, \dots, a_n sont des réels.

Si a_n est non-nul on dit que n est le degré de f .

Proposition. Les fonctions polynomiales sont définies et dérivables sur \mathbb{R} . Leurs limites en $\pm\infty$ sont celles de leurs termes de plus haut degré.

Remarque. Les fonctions de degré 0 sont les fonctions constantes non-nulles.

La fonction nulle est de degré $-\infty$.

Les fonctions de degré au plus 1 ($x \mapsto ax + b$) sont appelées fonctions affines.

Exemple 16. Tracé de quelques fonctions polynomiales.



B. Fonctions trigonométriques1) Sinus et cosinus

Proposition. *Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur \mathbb{R} et 2π -périodiques. La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. Elles sont dérivables, de dérivées $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.*

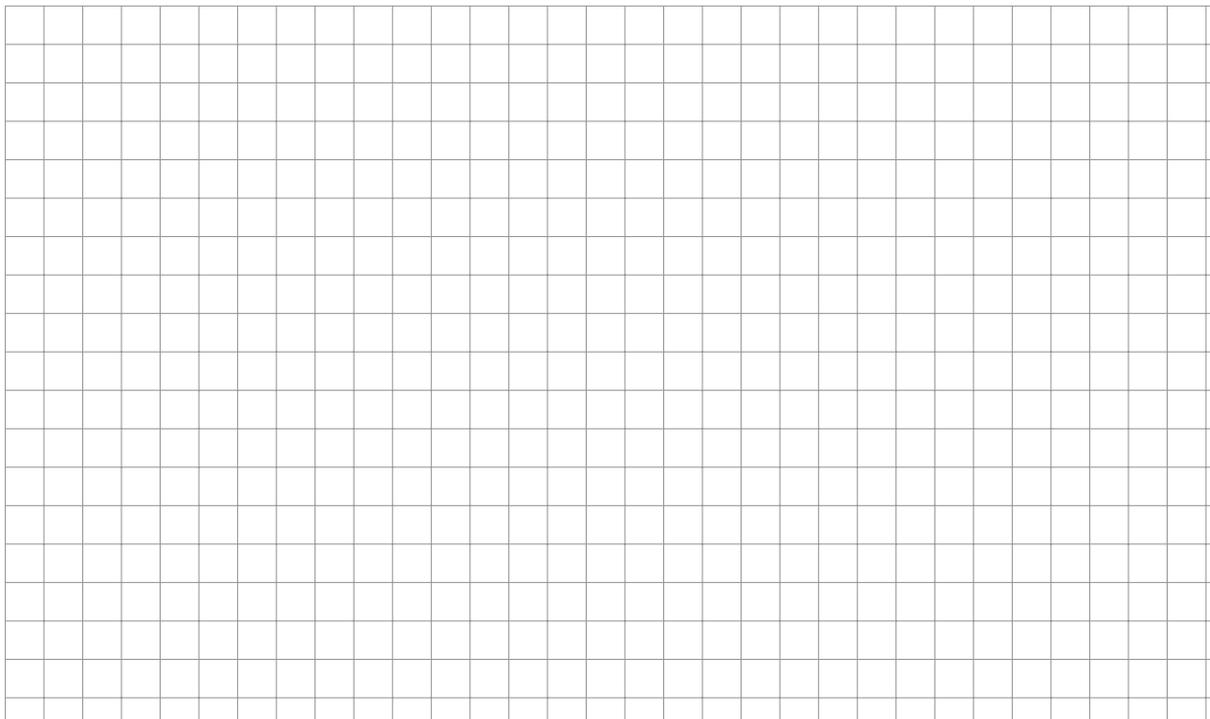
Démonstration. On connaît les propriétés :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + 2\pi) &= \cos x & \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(-x) &= \cos x & \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

La dérivabilité est conséquence de la propriété admise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.



Tracé.



▷ **Exercice 12.**

E. Croissances comparées

Théorème (Croissances comparées). *Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} =$$

Remarque. En particulier

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} =$$

Démonstration. Limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$:

Démonstration (suite).

Ensuite on écrit

$$\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha} \ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\beta \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta$$

Ceci permet de démontrer le deuxième résultat. Le premier s'obtient en écrivant

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \right)^\alpha \left| \ln \frac{1}{y} \right|^\beta = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta y}{y^\alpha} = 0$$

Les deux derniers résultats s'obtiennent en posant $y = e^x$. □

F. Études de fonctions**Plan d'une étude de fonction :**

- Détermination de l'ensemble de définition (si l'ensemble de départ n'est pas donné).
- Réduction de l'ensemble d'étude grâce à la périodicité et à la parité.
- Continuité, dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée. Éventuellement construction du tableau de variations.
- Limites aux bornes, étude des branches infinies (asymptotes éventuelles).
- Tracé.

Exemple 18. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

Définition. Si f admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en un réel b , alors on dit que la droite d'équation $x = b$ est asymptote à la courbe de f .

Si f admet une limite finie a en $+\infty$ ou $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe de f .

Si $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f .

Exemple 19. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : \ln x \leq x - 1$

▷ **Exercice 17.**

Exemple 20. On pose : $f(x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$

Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

▷ **Exercice 18.**