Corrigé du Devoir à la Maison n°1

Partie A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$S_n(x) = \frac{\cos((n-1)x)\sin(nx)}{\sin x}$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation. Pour $n = 1$ on obtient

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{0} \cos(2kx) = \cos 0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos((n-1)x)\sin(nx)}{\sin x} = 1.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.
Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On peut écrire :

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = S_n(x) + \cos(2nx)$$

L'hypothèse de récurrence donne la valeur de $S_n(x)$:

$$S_{n+1}(x) = \frac{\cos((n-1)x)\sin(nx)}{\sin x} + \cos(2nx) = \frac{\cos((n-1)x)\sin(nx) + \cos(2nx)\sin x}{\sin x}$$

On utilise deux fois la formule de transformation de produit en somme suivante :

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Ceci donne :

$$S_{n+1}(x) = \frac{\sin((2n-1)x) + \sin x + \sin((2n+1)x) + \sin(-(2n-1)x)}{2\sin x}$$

La fonction sinus est impaire (*i.e.*, $\sin(-x) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) donc :

$$S_{n+1}(x) = \frac{\sin x + \sin((2n+1)x)}{2\sin x}$$

Ensuite on utilise la formule de transformation de somme en produit suivante :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Elle donne :

$$S_{n+1}(x) = \frac{2\sin((n+1)x)\cos(-nx)}{2\sin x}$$

La fonction cosinus est paire (*i.e.*, $\cos(-x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) donc :

$$S_{n+1}(x) = \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin x}$$

Il s'agit de la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$, celle-ci est donc vraie.

On a prouvé que la proposition $\mathcal{P}_n$ implique la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$, ce qui démontre l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Par transformation de produit en somme :

$$\begin{aligned}\sin x \cos(2kx) &= \tfrac{1}{2}(\sin((2k+1)x) + \sin((1-2k)x)) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x))\end{aligned}$$

(b) Tout d'abord, par linéarité de la somme :

$$(\sin x)S_n(x) = \sin x \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n-1} (\sin x \cos(2kx))$$

La formule de la question précédente puis la linéarité de la somme donnent :

$$\begin{aligned}(\sin x)S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{2}(\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k-1)x)\right)\end{aligned}$$

Posons, dans la première somme, $j = k+1$. Alors j va de 1 à n et $k = j-1$, donc :

$$(\sin x)S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \sin((2(j-1)+1)x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k-1)x)\right)$$

Comme j est une variable muette alors on peut la remplacer par k donc :

$$(\sin x)S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k-1)x)\right)$$

Par télescopage :

$$\begin{aligned}(\sin x)S_n(x) &= \tfrac{1}{2}(\sin((2n-1)x) - \sin(-x)) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sin((2n-1)x) + \sin(x))\end{aligned}$$

Par transformation de somme en produit :

$$(\sin x)S_n(x) = \sin(nx)\cos((n-1)x)$$

Comme x n'est pas multiple de π alors $\sin x$ n'est pas nul donc :

$$S_n(x) = \frac{\cos((n-1)x)\sin(nx)}{\sin x}$$

On a retrouvé la formule de la question précédente.

Partie B.

1. (a) Soit $n = 5$ est $x = \frac{\pi}{5}$. Alors n est un entier strictement positif et x n'est pas multiple de π, donc on peut appliquer la formule. Elle donne :

$$\sum_{k=0}^{4} \cos\left(k\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\cos\frac{4\pi}{5}\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

En extension ceci donne :

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

(b) Comme $\frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$ alors

$$\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{8\pi}{5} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}$$

On en déduit :

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

(c) La formule de duplication pour le cosinus donne :

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(2\,\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$$

Le résultat de la question précédente devient alors :

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$$

Ceci signifie que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine du polynôme $4X^2 + 2X - 1$.

2. (a) Les racines de l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$ sont $X_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
Comme $\frac{2\pi}{5}$ appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors son cosinus est positif. Or X_1 est négatif, donc seule la solution X_2 est acceptable. On en déduit :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

(b) En utilisant la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et le fait que $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on obtient :

$$\boxed{\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

Pour la tangente on utilise la formule : $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Elle donne, après multiplication du dénominateur par sa quantité conjuguée :

$$\tan^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}} - 1 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}+1}\right)^2 - 1 = 5 + 2\sqrt{5}$$

Comme $\frac{2\pi}{5}$ appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors sa tangente est positive et donc :

$$\boxed{\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

3. On remarque que $\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$, donc :

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{5} \qquad \sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} \qquad \text{et} \qquad \tan\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\tan\frac{2\pi}{5}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \tan\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = \sqrt{1-2\frac{\sqrt{5}}{5}}}$$

Pour le calcul des valeurs en $\frac{\pi}{5}$ on remarque que $\frac{\pi}{5} = 2\frac{\pi}{10}$ et on utilise les formules de duplication :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Elles donnent :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \qquad \tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$