Corrigé du Devoir Surveillé n°1

Exercices.

(8 points)

1. (2 points) Soit (E) l'équation : $\sqrt{2x+7} = \sqrt{x+7} + 1$.

Cette équation est définie si $2x+7 \geq 0$ et $x+7 \geq 0$, donc si $x \geq -\frac{7}{2}$ et $x \geq -7$.

L'équation (E) est donc définie sur l'ensemble $[-\frac{7}{2}, +\infty[$.

Tous ses termes sont positifs donc par équivalences :

$$\begin{aligned} (E) &\iff 2x+7 = (\sqrt{x+7} + 1)^2 = x+7 + 2\sqrt{2x+7} + 1 \\ &\iff x-1 = 2\sqrt{x+7} \end{aligned}$$

Par élévation au carré :

$$\begin{aligned} (E) &\implies (x-1)^2 = 4(x+7) \\ &\implies x^2 - 6x - 27 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation du second degré sont $x = -3$ et $x = 9$.

Elles appartiennent bien à l'ensemble de définition. Comme on a raisonné par implications ce sont deux solutions potentielles de l'équation (E).

Or -3 n'est pas solution car $1 \neq \sqrt{4} + 1$, mais 9 est solution, car $\sqrt{25} = \sqrt{16} + 1$.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\mathcal{S}_1 = \{9\}$$

2. (2 points) Soit (E) l'équation : $\cos(5x) + \cos(6x) + \cos(7x) = 0$.

On applique la formule de transformation de somme en produit :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Pour $p = 5x$ et $q = 7x$ elle donne :

$$\begin{aligned} (E) &\iff 2 \cos(6x) \cos x + \cos(6x) = 0 \\ &\iff (2 \cos x + 1) \cos(6x) = 0 \\ &\iff \cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(6x) = 0 \\ &\iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation restreinte à l'intervalle $[0, \pi]$ est :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12} \right\}$$

3. (2 points) On calcule : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin(4x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Pour ceci on pose $h = x - \frac{\pi}{4}$. Alors $x = h + \frac{\pi}{4}$, et :

$$\sin(4x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(4h + \pi) \tan\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(4h) \left(-\frac{1}{\tan h}\right) = \frac{\sin(4h) \cos h}{\sin h}$$

On utilise deux fois la formule $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$:

$$\sin(4x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \sin(2h) \cos(2h) \cos h}{\sin h} = 4 \cos^2 h \cos(2h)$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin(4x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} 4 \cos^2 h \cos(2h)$ donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin(4x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 4}$$

4. (2 points) La formule de somme pour la tangente donne :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = -1$$

Or $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, donc il existe un entier k tel que $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

On sait que α et β appartiennent à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mais leurs tangentes sont positives, donc ils appartiennent à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, par somme :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad 0 < \alpha + \beta < \pi$$

Cet encadrement donne $0 < -\frac{\pi}{4} + k\pi < \pi$, puis $\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$.

Or k est entier, donc $k = 1$, puis $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$:

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}}$$

Problème 1.

(12 points)

1. (a) (2 points) On peut décomposer la somme A_{2n} de la façon suivante :

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} k = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} k$$

Les nombres pairs compris entre 1 et $2n$ sont $2, 4, \dots, 2n$, donc les $2k$ pour k allant de 1 à n .

Les nombres impairs compris entre 1 et $2n$ sont $1, 3, \dots, 2n - 1$, donc les $2k - 1$ pour k allant de 1 à n .

On en déduit : $A_{2n} = \sum_{k=1}^n (2k) + \sum_{k=1}^n (2k-1)$.

Ensuite on calcule en utilisant la linéarité de la somme :

$$A_{2n} = 2\sum_{k=1}^n k + 2\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 4A_n - n$$

(b) (2 points) Posons $j = k - n$. Alors $k = j + n$ et :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k = \sum_{j=1}^n (j+n)$$

Comme j est une variable muette on peut la remplacer par k . Puis par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n n = A_n + n^2$$

On remarque que :

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} k = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=n+1}^{2n} k = 2A_n + n^2$$

(c) (1 point) Les expressions de A_n obtenues dans les deux questions précédentes donnent :

$$4A_n - n = 2A_n + n^2$$

On en déduit $2A_n = n^2 + n = n(n+1)$, et enfin :

$$A_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. (a) (2 points) Pour tout entier $n \geq 2$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

Initialisation. La propriété $\mathcal{P}_2$ s'écrit $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$. Comme $\binom{2}{2} = \binom{3}{3} = 1$ elle est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la propriété est vraie. Alors :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} + \binom{n+1}{2}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

La formule de Pascal donne :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Nous avons démontré que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

(b) (2 points) Par définition des coefficients du binôme :

$$\binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

La propriété démontrée dans la question précédente donne alors :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

Si $k = 1$ alors $\frac{k(k-1)}{2} = 0$, donc on peut débiter la somme au rang $k = 1$.

De plus la formule est valable pour $n = 0$ et pour $n = 1$, car une somme vide est nulle. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

Par linéarité de la somme on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

Ainsi :

$$B_n = A_n + \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

On utilise la formule pour A_n :

$$B_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)}{6}(3 + 2(n-1))$$

Finalement :

$$B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. (a) (1 point) Pour tout entier i , d'après la question précédente :

$$B_i = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} = \frac{1}{6}(2i^3 + 3i^2 + i)$$

Par linéarité de la somme :

$$S_n = \sum_{i=1}^n B_i = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i$$

On en déduit, en utilisant les formules pour A_n et B_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3}C_n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12} \\ &= \frac{1}{3}C_n + \frac{n(n+1)(2n+2)}{12} = \frac{1}{3}C_n + \frac{n(n+1)^2}{6} \end{aligned}$$

(b) (1 point) Par inversion de l'ordre des indices dans une somme triangulaire :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i k^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n k^2$$

On en déduit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (n - k + 1)k^2 = \sum_{k=1}^n ((n + 1)k^2 - k^3)$$

Par linéarité de la somme :

$$S_n = (n + 1) \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 = (n + 1)B_n - C_n = \frac{n(n + 1)^2(2n + 1)}{6} - C_n$$

(c) (1 point) Les deux formules pour S_n obtenues dans les question précédente donnent :

$$\frac{1}{3}C_n + \frac{n(n + 1)^2}{6} = \frac{n(n + 1)^2(2n + 1)}{6} - C_n$$

On en déduit :

$$\frac{4}{3}C_n = \frac{n(n + 1)^2(2n + 1)}{6} - \frac{n(n + 1)^2}{6} = \frac{n(n + 1)^2(2n)}{6} = \frac{n^2(n + 1)^2}{3}$$

Finalement :

$$C_n = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Problème 2.

(13 points)

1. (a) (1 point) Par formule de linéarisation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Si x appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos x$ est positif, donc :

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

(b) (1 point) Les formules de duplication suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{et} \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

donnent :

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \tan x$$

Ceci est la formule attendue. Elle est valable pour tout x tel que $\cos x \neq 0$, donc *a fortiori* pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. (3 points) On peut appliquer les formules de la question précédente à $x = \frac{\pi}{8}$ car ce réel est bien dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La première donne :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

La seconde donne :

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1$$

On peut ensuite calculer le sinus grâce à la formule :

$$\sin \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} \tan \frac{\pi}{8}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

3. (1 point) On remarque que : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

On utilise donc les formules :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x \quad \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{1}{\tan x}$$

Elles donnent :

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \tan \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$$

4. (a) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2}$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. On sait que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $u_0 = 0$, donc $\cos \frac{\pi}{2} = \frac{u_0}{2}$.

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Comme $n \geq 0$ alors $\frac{\pi}{2^{n+2}} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc on peut lui appliquer la formule de la question 2(a). Elle montre que :

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}}$$

Par hypothèse de récurrence $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2}$, donc :

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{u_n}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + u_n}}{2}$$

Par définition de la suite (u_n) ceci donne $\cos \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{u_{n+1}}{2}$, donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (1 point) La propriété que nous venons de démontrer s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0$ et la fonction cosinus est continue alors la suite $(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}})$ converge vers $\cos 0 = 1$, ce qui montre que la suite (u_n) converge vers 2.

5. (a) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$2^n \sin \theta \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k \theta) = \sin(2^n \theta)$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. : Pour $n = 0$ le produit est vide, donc il est égal à 1.

La propriété $\mathcal{P}_0$ devient : $\sin \theta = \sin \theta$. Elle est donc vraie.

Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$2^{n+1} \sin \theta \prod_{k=0}^n \cos(2^k \theta) = 2 \left(2^n \sin \theta \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k \theta) \right) \times \cos(2^n \theta)$$

Par hypothèse de récurrence :

$$2^{n+1} \sin \theta \prod_{k=0}^n \cos(2^k \theta) = 2 \sin(2^n \theta) \cos(2^n \theta) = \sin(2^{n+1} \theta)$$

Ceci démontre que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

L'hérédité de la proposition $\mathcal{P}$ est démontrée.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (1 point) On suppose que x est un réel non-nul, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\theta = \frac{x}{2^n}$.

La propriété de la question précédente devient :

$$2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{x}{2^{n-k}}\right) = \sin x$$

On applique le changement de variable $\ell = n - k$.

Si k parcourt l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$

alors ℓ parcourt l'ensemble $\{n, n-1, \dots, 1\} = \{1, 2, \dots, n\}$ donc :

$$2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{\ell=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^\ell}\right) = \sin x$$

Comme ℓ est une variable muette alors on peut la remplacer par k , et en divisant par x , qui est non-nul, on obtient :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

6. (1 point) Pour $x = \frac{\pi}{2}$ la formule de la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2}{\pi} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$$

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1$$

La formule de la question précédente donne alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \frac{u_k}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{u_k}{2} = \frac{2}{\pi}$$