

**Programme de colles**  
**Semaine 3**  
**du 2 au 6 octobre 2023**

**Questions de cours**

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Racines  $n$ -èmes de l'unité. Définition et propriété :  $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \mid k = 0 \dots n-1 \right\}$ .
2. Somme et produit des racines  $n$ -èmes de l'unité.
3. Dérivabilité et dérivée de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .
4. Dérivabilité et dérivée de  $uv$ .

**Exercices**

**Chapitre B1. Les nombres complexes**

- I. Généralités
- II. Angles
- III. Équations algébriques
- IV. L'exponentielle complexe

**Programme prévisionnel de la semaine suivante**

Chapitre B1 et début du A3 (Fonctions).

## Chapitre B1. Les nombres complexes

### I. Généralités

Parties réelle et imaginaire, opérations sur les nombres complexes, représentation dans le plan, affixe et image, droite des réels, des imaginaires purs.

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Formules  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ . Caractérisation des réels et des imaginaires purs ( $\bar{\bar{z}} = z$  et  $\bar{-z} = -z$ ).

Module, compatibilité avec la multiplication. Inégalités triangulaires. Lemme pour la démonstration : pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|\bar{z}| = |z|$  et  $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ ,  $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$ .

Le module de  $a - b$  est la distance de  $A$  à  $B$ . Définitions : cercle, disque ouvert et fermé dans le plan complexe.

### II. Angles

On note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1. Il est stable par multiplication, passage à l'inverse. On pose  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ . Alors  $e^{it} e^{it'} = e^{i(t+t')}$ . Formules d'Euler.

Argument : définition, non-unicité, propriétés ( $\arg(zz') = \dots$ ). Aspect géométrique de la multiplication de deux complexes. Formes algébriques et exponentielles d'un complexe. Description géométrique des applications  $z \mapsto z + b$ ,  $z \mapsto \lambda z$ ,  $z \mapsto e^{i\theta} z$  et  $z \mapsto \bar{z}$ .

Applications à la trigonométrie : formules de somme, de duplication, de transformation de produit en somme, de transformation de somme en produit, formules en  $t = \tan(x/2)$ . Formule de Moivre, calcul des cosinus, sinus de  $nx$  où  $n$  est un entier naturel. Linéarisation d'une expression trigonométrique, petits calculs d'intégrales. Simplification de  $1 + e^{it}$ ,  $e^{ip} + e^{iq}$  en factorisant par l'exponentielle de l'angle moyen. Simplification de  $a \cos x + b \sin x$  (transformation de Fresnel).

Applications à la géométrie : conditions nécessaires et suffisantes sur les affixes pour que trois points soient alignés, deux vecteurs soient parallèles ou orthogonaux.

### III. Equations algébriques.

Equations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines.

Racines de l'unité, notation  $\mathbb{U}_n$ , exemples. Somme (0) et produit  $((-1)^{n-1})$ .

Racines  $n$ -èmes d'un complexe quelconque.

### IV. L'exponentielle complexe

Définition :  $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ . Propriétés, l'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est surjective, non injective (première introduction de ces notions, sans donner les définitions).