Lycée Bellevue – Toulouse **13 octobre 2023**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°2

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème et indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1. *(7 points)*

Pour tout couple d'entiers naturels (n, p) on note :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

On souhaite démontrer que :

$$\forall n > p \qquad S_{n,p} = 0$$

1. Démontrer cette propriété dans le cas où $p = 0$: $\forall n > 0 \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
2. (a) Justifier que pour tout couple d'entier (k, n) tel que $1 \leqslant k \leqslant n$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
   (b) En déduire que la propriété est vraie dans le cas où $p = 1$.
3. À l'aide du triangle de Pascal calculer $S_{n,p}$ pour $p = 2$ et n allant de 0 à 6.
   On pourra faire un tableau.
   Vérifier ainsi la propriété pour cette valeur de p et ces valeurs de n.
4. À l'aide de la formule (2a) et de la formule de Pascal, démontrer que pour tout couple d'entiers naturels (n, p) avec $p > 0$: $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$.
5. Démontrer par récurrence sur p la propriété : $\forall n > p \quad S_{n,p} = 0$.

Exercice 2. *(13 points)*

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ puis : $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ $\quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\overline{\omega^k} = \omega^{7-k}$.
   (b) En déduire que A et B sont conjugués.
2. (a) Donner les parties réelles et imaginaires de A.
   (b) Justifier que $\sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{2\pi}{7}$. En déduire que $\operatorname{Im} A > 0$.
3. (a) Démontrer que $A + B = -1$, puis que $AB = 2$.
   (b) En déduire les valeurs de A et de B.
4. (a) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.
   (b) En déduire que $\cos\frac{\pi}{7}$ est solution de l'équation : $8t^3 - 4t^2 - 4t + 1 = 0$.
   On n'essaiera pas de résoudre cette équation.
5. (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k = -i\tan\frac{\pi}{7}$.
   (b) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k = A - B - 2(\omega - \omega^6)$.
   (c) En déduire que $\tan\frac{\pi}{7}$ est solution de l'équation : $t^3 + \sqrt{7}t^2 - 7t + \sqrt{7} = 0$.
   On n'essaiera pas de résoudre cette équation.

Problème. *(23 points)*

Partie A. *(10 points)*

Dans cette partie on admet les propriétés suivantes :

$$\mathcal{P}_1 : \quad \forall t \in \,]-1, +\infty[\quad \ln(1+t) \leqslant t$$

$$\mathcal{P}_2 : \quad \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \qquad\qquad \mathcal{P}_3 : \quad \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

Elles seront démontrées dans la partie C.

On définit la fonction
$$f : \begin{array}{rcl}]-1, 0[\,\cup\,]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}. \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie, dérivable, et calculer sa dérivée.
2. Donner les limites de f en 0 et en -1, notées ℓ et k.

D'après ce qui précède on peut prolonger f par continuité à l'intervalle $[-1, +\infty]$, en posant $f(0) = \ell$ et $f(-1) = k$.

On note toujours f le prolongement par continuité obtenu.

3. Justifier que f n'est pas dérivable en -1.
4. Démontrer que f est dérivable en 0 et donner sa dérivée.
5. Déterminer les variations de f.
6. Calculer la limite de f en $+\infty$.
7. Représenter l'allure de la courbe représentative de f.

Partie B. *(4 points)*

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

1. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(bx) - f(ax)$, où f est la fonction définie dans la partie précédente.
3. En déduire que g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Démontrer que :

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 \qquad \ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$$

Partie C. *(9 points)*

Le but de cette partie est de démontrer les propriétés énoncées au début de la partie A.

1. Démontrer la propriété $\mathcal{P}_2$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]-1,+\infty\right[$:

$$f_n(t) = \ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-t)^k}{k}$$

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est dérivable et donner une expression de sa dérivée sans signe somme.
3. Déterminer les variations de f_n, selon que n soit pair ou impair.
   Donner ensuite le signe de $f_n(t)$ en fonction de t et de la parité de n.
4. Déduire de la question précédente une démonstration de la propriété $\mathcal{P}_1$.
5. (a) Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

   (b) En déduire : $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = -\frac{1}{2}$

6. (a) Justifier que la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln(1+t) - t + \ln(1-t) + t}{t^2}$$

   admet une limite en 0 et donner sa valeur.

   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ >}} \frac{\ln(1-t)+t}{t^2}$, puis conclure en démontrant la propriété $\mathcal{P}_3$.