Corrigé du Devoir Surveillé n°2

Exercice 1. *(7 points)*

1. *(1 point)* On souhaite démontrer : $\forall n > 0 \quad S_{n,0} = 0$.

   Or pour tout $n > 0$: $S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$

   D'après la formule du binôme : $S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$

   La formule est donc démontrée pour $p = 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) *(1 point)* Il suffit d'utiliser la définition des coefficients du binôme.

   Si $1 \leqslant k \leqslant n$ alors $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant k-1 \leqslant n-1$ donc :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{et} \qquad n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

   Comme $k \geqslant 1$ alors $k \neq 0$ et donc $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$.
   Comme $n \geqslant k$ alors $n \neq 0$ et donc $n! = n(n-1)!$.
   On obtient bien :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   La formule est démontrée.

   (b) *(1 point)* Démontrons que la propriété est vraie pour $p = 1$.

   Soit $n > 1$. Alors $S_{n,1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^k$.

   Pour $k = 0$ on a $k\binom{n}{k}(-1)^k = 0$ donc : $S_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^k$.

   Pour k allant de 1 à n on peut appliquer la formule que nous venons de démontrer, elle donne :

$$S_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(-1)^k$$

   Le changement de variable $\ell = k-1$ donne :

$$S_{n,1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} n\binom{n-1}{\ell}(-1)^{\ell+1} = -n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}(-1)^{\ell}$$

   Ainsi $S_{n,1} = -nS_{n-1,0}$. La propriété est vraie pour $p = 0$ et $n > 0$. Comme $n > 1$ alors $n-1 > 0$, donc $S_{n,1} = 0$.
   On a démontré que : $\forall n > 1 \quad S_{n,1} = 0$.

3. *(1 point)* Les lignes 0 à 6 du triangle de Pascal sont :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

En multipliant les coefficients de chaque colonne k par k^2 on obtient le tableau des $\binom{n}{k}k^2$. En calculant la somme alternée des coefficients de chaque ligne on obtient les valeurs de $S_{n,2}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	$S_{n,2}$
0	0							0
1	0	1						-1
2	0	2	4					-2
3	0	3	12	9				0
4	0	4	24	36	16			0
5	0	5	40	90	80	25		0
6	0	6	60	180	240	150	36	0

Effectivement pour $n > 2$ (et $n \leqslant 6$) on a obtenu $S_{n,2} = 0$.

4. *(1 point)* Soit n et p deux entiers naturels avec $p > 0$.

Par définition : $S_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{p+1}$.

On en déduit : $S_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k \times k^p = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} k^p$.

La formule de la question (2a) donne :

$$S_{n,p+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} k^p$$

Grâce à la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$.

Par linéarité :

$$S_{n,p+1} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p - n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}k^p$$

Comme $p > 0$ alors $0^p = 0$, et si $k = n$ alors $\binom{n-1}{k} = 0$ donc :

$$S_{n,p+1} = n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}k^p\right)$$

Ceci donne bien $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$.

5. *(2 points)* La propriété a été démontrée pour $p = 0$ dans la question (1).
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on définit la propriété :

$$\mathcal{P}_p : \quad \forall n > p \quad S_{n,p} = 0$$

Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
<u>Initialisation.</u> Pour $p = 1$ la propriété a été démontrée dans la question (2b).
<u>Hérédité.</u> Supposons que la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente, comme $p > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$$

Supposons que $n > p + 1$. Alors $n > p$ et $n - 1 > p$, et comme la propriété $\mathcal{P}_p$ est supposée vraie alors $S_{n,p} = S_{n-1,p} = 0$, donc $S_{n,p+1} = 0$.
La propriété $\mathcal{P}_{p+1}$ est donc vraie : $\quad \forall n > p + 1 \quad S_{n,p+1} = 0$.
L'hérédité est démontrée.
<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Finalement on a démontré que $S_{n,p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels (n, p) tel que $n > p$.

Exercice 2. *(13 points)*

1. (a) *(1 point)* On remarque que $\omega^7 = 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\overline{\omega^k} = \overline{e^{ik\frac{2\pi}{7}}} = e^{-ik\frac{2\pi}{7}} \qquad \text{et} \qquad \omega^{7-k} = \omega^7\omega^{-k} = e^{-ik\frac{2\pi}{7}}$$

Ceci donne bien $\overline{\omega^k} = \omega^{7-k}$.

(b) *(1 point)* D'après ce qui précède :

$$\overline{B} = \overline{\omega^3 + \omega^5 + \omega^6} = \overline{\omega^3} + \overline{\omega^5} + \overline{\omega^6} = \omega^{7-3} + \omega^{7-5} + \omega^{7-6} = \omega^4 + \omega^2 + \omega = A$$

Ceci montre que A et B sont conjugués.

2. (a) *(0,5 point)* Comme $A = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$ alors :

$$\mathrm{Re}(A) = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(A) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$$

(b) *(1,5 points)* La fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $0 \leqslant \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{2\pi}{7}$.
Comme $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$ alors $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$.
Ceci donne :

$$\mathrm{Im}(A) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > \sin\frac{4\pi}{7}$$

Comme $0 < \frac{4\pi}{7} < \pi$ alors $\sin\frac{4\pi}{7} > 0$, donc $\mathrm{im}(A) > 0$.

3. (a) *(2 points)* On constate que :

$$A + B = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \sum_{k=1}^{6} \omega^k$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.
Comme $0 < \frac{2\pi}{7} < 2\pi$ alors $\omega \neq 1$, et :

$$A + B = \frac{\omega - \omega^7}{1 - \omega} = \frac{\omega - 1}{1 - \omega} = -1$$

Pour calculer le produit AB on développe puis on utilise la relation $\omega^7 = 1$:

$$\begin{aligned} AB &= \left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right)\left(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6\right) \\ &= \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= 3 + A + B \end{aligned}$$

Comme $A + B = -1$ alors $AB = 2$.

(b) *(1 point)* Par propriété de équations du second degré A et B sont les deux solutions de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$.
Ces deux solutions sont $x_1 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.
La partie imaginaire de A est strictement positive donc :

$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$$

4. (a) *(1 point)* La formule de somme pour le cosinus et les formules de duplication donnent, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

(b) *(1 point)* On sait que la partie réelle de A est :

$$\mathrm{Re}(A) = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$$

Comme $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$ alors $\cos\frac{8\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$.
Comme $\frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$ alors $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$.
Comme $A = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ alors la partie réelle de A est $\mathrm{Re}(A) = -\frac{1}{2}$, donc :

$$\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

Les formules pour $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ donnent :

$$2\cos^2\frac{\pi}{7} - 1 - 4\cos^3\frac{\pi}{7} + 3\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

En posant $t = \cos\frac{\pi}{7}$ on obtient :

$$8t^3 - 4t^2 - 4t + 1 = 0$$

Ceci montre que $\cos\frac{\pi}{7}$ est solution de l'équation $8t^3 - 4t^2 - 4t + 1 = 0$.

5. (a) *(2 points)* On calcule $-\omega = e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{7}} = e^{i\frac{9\pi}{7}}$. Comme $0 < \frac{9\pi}{7} < 2\pi$ alors $-\omega \neq 1$.
La suite $\left((-\omega)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\omega$ différente de 1 donc :

$$\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k = \frac{-\omega - (-\omega)^7}{1+\omega}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k = \frac{-\omega - (-1)^7\omega^7}{1+\omega} = \frac{1-\omega}{1+\omega}$$

Puis :

$$\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k = \frac{1-e^{i\frac{2\pi}{7}}}{1+e^{i\frac{2\pi}{7}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{7}}\left(e^{-i\frac{\pi}{7}} - e^{i\frac{\pi}{7}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{7}}\left(e^{-i\frac{\pi}{7}} + e^{i\frac{\pi}{7}}\right)} = \frac{-2i\sin\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}} = -i\tan\frac{\pi}{7}$$

On a démontré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k = -i\tan\frac{\pi}{7}$.

(b) *(1 point)* On développe la somme de la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k &= -\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5+\omega^6\\ &= \quad\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5-\omega^6-2\omega+2\omega^6\\ &= A-B-2\Big(\omega-\omega^6\Big)\end{aligned}$$

On a démontré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-\omega)^k = A-B-2(\omega-\omega^6)$.

(c) *(1 point)* Les valeurs de A et de B montrent que $A-B=i\sqrt{7}$.
De plus, comme $\omega^6=\overline{\omega}$ alors $\omega-\omega^6=2i\operatorname{Im}\omega$.
Or $\omega=e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $\omega-\omega^6=2i\sin\frac{2\pi}{7}$.
Les deux questions précédentes donnent :

$$-i\tan\frac{\pi}{7}=i\sqrt{7}-4i\sin\frac{2\pi}{7}$$

Posons $t=\tan\frac{\pi}{7}$. La formule en $t=\tan\frac{x}{2}$ pour le sinus est $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, donc :

$$-it=i\sqrt{7}-4i\frac{2t}{1+t^2}$$

On en déduit :

$$t^3+\sqrt{7}t^2-7t+\sqrt{7}=0$$

On a démontré que $\tan\frac{\pi}{7}$ est solution de l'équation : $t^3+\sqrt{7}t^2-7t+\sqrt{7}=0$.

Problème. *(23 points)*

Partie A. *(10 points)*

1. *(2 points)* Notons $\mathcal{D}=]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
Si $t\in\mathcal{D}$ alors $t>-1$, donc $t+1>0$, et ainsi $\ln(1+t)$ est bien défini.
De plus, si $t\in\mathcal{D}$ alors $t\neq 0$, donc le quotient $\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}$ est bien défini.
Ceci montre que f est bien définie sur l'ensemble $\mathcal{D}$.
Les fonctions polynomiales et la fonction logarithme népérien sont dérivables, donc par composition, produit et quotient f est dérivable.
Sa dérivée est :

$$\forall t\in\mathcal{D}\qquad f'(t)=\frac{(\ln(1+t)+1)t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2}=\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

2. *(2 points)* On remarque que : $\forall t\in\mathcal{D}\quad f(t)=(1+t)\frac{\ln(1+t)}{t}$
D'après la propriété $\mathcal{P}_2$ et par produit de limites : $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(t)=1$
Posons $h=t+1$. Alors : $\displaystyle\lim_{t\to -1}f(t)=\lim_{h\to 0}f(h-1)=\lim_{h\to 0}\frac{h\ln h}{h-1}$
Par théorème de croissances comparées : $\displaystyle\lim_{h\to 0}h\ln h=0$.
Par quotient de limites : $\displaystyle\lim_{t\to -1}f(t)=0$.

On pose donc pour la suite $f(0)=1$ et $f(-1)=0$.

3. *(1 point)* Calculons le taux d'accroissement de f en -1 :

$$\forall t \in \mathcal{D} \qquad \frac{f(t)-f(-1)}{t-(-1)} = \frac{\frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}}{t+1} = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

Par quotient de limites : $\lim\limits_{t\to -1} \frac{f(t)-f(-1)}{t-(-1)} = +\infty$

Ceci montre que f n'est pas dérivable en -1.

4. *(1 point)* Calculons le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathcal{D} \qquad \frac{f(t)-f(0)}{t-0} &= \frac{\frac{(1+t)\ln(1+t)}{t} - 1}{t} \\ &= \frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t^2} = \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} + \frac{\ln(1+t)}{t}\end{aligned}$$

D'après les propriétés $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, admises pour l'instant : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$.

Ceci montre que f est dérivable en 0 et donne la valeur $f'(0) = \frac{1}{2}$.

5. *(1 point)* La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$, de dérivée :

$$\begin{aligned} f' :]-1,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \frac{t-\ln(1+t)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

D'après la propriété $\mathcal{P}_1$: $\forall t \in]-1,+\infty[\quad t - \ln(1+t) \geqslant 0$.

Comme t^2 est positif on en déduit que f' est positive sur $]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$.

Comme $f'(0) = \frac{1}{2}$ alors f' est positive sur $]-1,+\infty[$, et donc f est croissante.

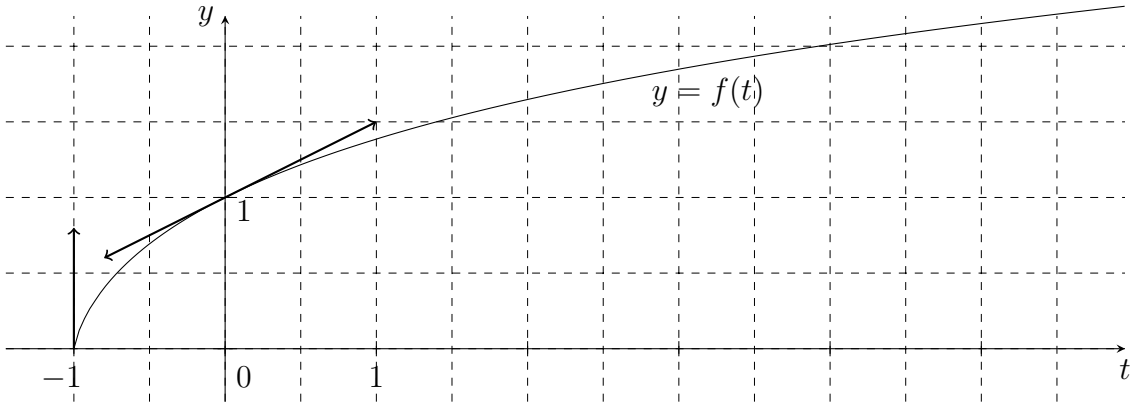
6. *(1 point)* Pour déterminer la limite de f en $+\infty$ on écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(t) = \left(\frac{1}{t}+1\right)\ln(1+t)$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+1\right) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln(1+t) = +\infty$ alors par somme :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$$

7. *(2 points)* On obtient une figure comme la suivante.



Partie B. *(4 points)*

1. *(1 point)* Par énoncé a et b sont strictement positifs.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $1 + ax > 1$ et $1 + bx > 1$.
   Ainsi $\ln(1 + ax)$ et $\ln(1 + bx)$ sont définis et strictement positifs, donc leur quotient aussi.
   Donc $g(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Par composition et quotient la fonction g est dérivable.
2. *(1 point)* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \ln(1+ax)\frac{b}{1+bx}}{\ln^2(1+bx)} \\ &= \frac{abx}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)}\left(\frac{(1+bx)\ln(1+bx)}{bx} - \frac{(1+ax)\ln(1+ax)}{ax}\right) \\ &= \frac{abx}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)}(f(bx) - f(ax)) \end{aligned}$$

3. *(1 point)* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme a et b sont strictement positifs alors :

$$\frac{abx}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)} > 0$$

   Ceci montre que $g'(x)$ est du signe de $(f(bx) - f(ax))$.
   On a supposé que $a < b$. Alors $ax < bx$ car x est strictement positif, puis $f(ax) \leqslant f(bx)$ car la fonction f est croissante, comme nous l'avons démontré dans la partie précédente, et donc $g'(x) \geqslant 0$.
   Ainsi $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc g est croissante.
4. *(1 point)* Comme $0 < a \leqslant b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$, et comme la fonction g est croissante alors $g\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant g\left(\frac{1}{a}\right)$. Ceci donne :

$$\frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln 2} \leqslant \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$

   Comme $\ln 2 > 0$ et $\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) > 0$ alors :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$$

   Ceci est toujours vrai si on inverse a et b donc cette inégalité est valable aussi si $b \leqslant a$, donc pour tous a et b strictement positifs.

Partie C. *(9 points)*

1. *(1 point)* La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto \frac{1}{t}$.
   En particulier elle est dérivable en 1 de dérivée 1.
   Par définition ceci signifie $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)-\ln 1}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.
   La propriété $\mathcal{P}_2$ est démontrée.

2. *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-t)^k}{k}$ est polynomiale donc elle est dérivable.
   Par somme la fonction f_n est dérivable. Sa dérivée est :

$$\forall t \in]-1,+\infty[\qquad f_n'(t) = \frac{1}{1+t} + \sum_{k=1}^{n}\left(-k\frac{(-t)^{k-1}}{k}\right) = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}$$

   Comme $t \in]-1,+\infty[$ alors $-t \neq 1$ donc la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique donne :

$$f_n'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{(-t)^n}{1+t}$$

3. *(2 points)* Si n est pair alors $(-t)^n$ est positif pour tout $t \in]-1,+\infty[$, donc f_n' est croissante.
   Si n est impair alors $(-t)^n$ est du signe de $-t$, donc f_n' est positive sur $]-1,0[$ et négative sur $]0,+\infty[$, puis f_n est croissante sur $]-1,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$.
   On remarque que $f_n(0) = 0$. Donc les variations de f_n montrent que :
   - Si n est pair alors f_n est négative sur $]-1,0[$ et positive sur $]0,+\infty[$.
   - Si n est impair alors f_n est négative sur $]-1,+\infty[$.

   Tout ceci peut être visualisé sur les tableaux de variations suivants :

n pair

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

n impair

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

4. *(1 point)* Comme 1 est impair alors d'après la question précédente la fonction f_1 est négative, ce qui donne :

$$\forall t \in]-1,+\infty[\qquad \ln(1+t) - t \leqslant 0$$

   La propriété $\mathcal{P}_1$ en est une conséquence directe.

5. (a) *(1 point)* Comme 2 est pair et 3 est impair alors d'après la question (3) la fonction f_2 est positive sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction f_3 est négative sur $\mathbb{R}_+$. Ceci s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leqslant 0$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

(b) *(1 point)* Comme t^2 est positif alors l'encadrement précédent donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{t}{3}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, alors par théorème d'encadrement on obtient :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

6. (a) *(0,5 point)* On remarque que : $\varphi(t) = \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$.
On sait que $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, ce qui donne, en posant $h = -u$: $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1-h)}{-h} = 1$.
Ainsi par composition de limites : $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = -1$.

(b) *(1,5 points)* On peut aussi écrire :

$$\varphi(t) = \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} + \frac{\ln(1-t) + t}{t^2}$$

Ceci donne :

$$\frac{\ln(1-t) + t}{t^2} = \varphi(t) - \frac{\ln(1+t) - t}{t^2}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \varphi(t) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$ alors par soustraction :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1-t) + t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

En posant $h = -t$ on en déduit :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = -\frac{1}{2}$$

Finalement on a démontré que :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

Ceci démontre la propriété $\mathcal{P}_3$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$