Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2023-2024**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 6
du 6 au 10 novembre 2023

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
4. Dérivabilité et dérivée de l'arc-tangente.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

Exercices

Chapitre A3. Fonctions d'une variable réelle

I. Généralités sur les réels
II. Généralités sur les fonctions
III. Dérivation
IV. Continuité
V. Fonctions classiques

Chapitre B2. Ensembles

I. Ensembles
II. Applications
III. Relations binaires

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B2 (Ensembles) et A4 (Fonctions usuelles).

Chapitre A3. Fonctions d'une variable réelle

I. Généralités sur les réels

Rappels sur la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$: compatibilité avec les opérations, etc. Intervalles. Majorants, minorant d'une partie. Maximum, minimum d'une partie. Pas de bornes supérieures et inférieures pour l'instant.

II. Généralités sur les fonctions

Exemples de graphes de fonctions du type $x \mapsto f(x) + a$, $f(x + a)$, $f(ax)$, $af(x)$. Parité, périodicité. Sommes, produits, quotients de fonctions. Composition. Extrema, croissance.

III. Dérivation

Définition de la dérivée. Tangentes. Liens entre la croissance de f et le signe de f' (sans démonstration). Dérivées usuelles, opérations, dont la composition. Dérivées n-èmes (sans la formule de Leibniz). Exemples : exp, cos, sin, ln.

IV. Continuité

Définition, lien avec la dérivabilité. Théorème des valeurs intermédiaires, pas encore de bijections .

V. Fonctions classiques

Fonctions polynomiales. Fonctions sinus, cosinus, tangente. Fonctions logarithme (népérien, décimal brièvement binaire), fonction exponentielle, fonctions puissance. Croissances comparées.

Plan d'étude d'une fonction : ensemble de définition, réduction grâce à la parité et la périodicité, dérivation, tableau de variations, limites (simples pour l'instant), tracé.

Chapitre B2. Ensembles

I. Ensembles

Ensemble, éléments. Appartenance, inclusion, ensemble vide, partie ou sous-ensemble. Ensemble $\mathcal{P}(E)$. Complémentaire, intersection, réunion, différence. Distributivité de $\cap$ et $\cup$ l'une par rapport à l'autre. Lois de de Morgan. Produit cartésien fini. Exemples des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

II. Applications

Ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications d'un ensemble E vers un ensemble F. Ensembles de départ, d'arrivée, graphe, image et antécédent d'un élément. Identité de E, restriction, prolongement. Image d'une partie de E, image réciproque d'une partie de F.

Injection, surjection, bijection. Stabilité par composition. Fonction réciproque d'une bijection, unicité, caractérisation : $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On a alors $g = f^{-1}$, et l'unicité de f^{-1}. Réciproque d'une composée.

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: théorème de la bijection, théorème de dérivation de la réciproque.

III. Relations binaires

Relation d'équivalence. Classe d'équivalence, elles réalisent une partition.

Relation d'ordre, total ou partiel. Majorant, minorant, maximum, minimum d'une partie.