Chapitre A5 Primitives

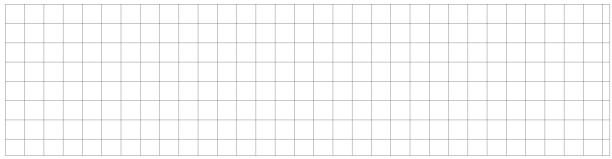
I. Intégrales et primitives

A. Intégrales

Définition. Soit I un intervalle, a et b deux points de I tels que a < b, et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt$$
 ou $\int_a^b f$

est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations x=a et x=b, et la courbe de f. Les parties situées en-dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.

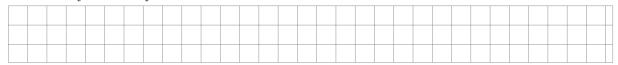


Si a > b alors on note :

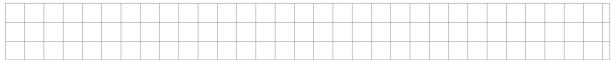
$$\int_{a}^{b} f(t) dt = -\int_{b}^{a} f(t) dt$$

Remarque. La variable t est muette : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Proposition. (Relation de Chasles) Soit a, b, c sont trois points quelconques d'un intervalle I et f est une fonction continue sur I. Alors :



Proposition. (Linéarité) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b], et λ un réel. Alors:



Proposition. (Inégalité triangulaire) Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b]. Alors:



B. Gonard

Proposition. (Croissance de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b sont deux points de I tels que a < b.



Exemple 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \cos t \, dt$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

B. Primitives

Définition. Soit D une partie de \mathbb{R} , et $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction. Une <u>primitive</u> de f est une fonction $F:D\to\mathbb{R}$ telle que :

- F est dérivable.
- F' = f

Exemple 2. Soit:

$$f_1(x) = 4$$
 $f_2(x) = x$ $f_3(x) = \sin x$ $f_4(x) = e^x$ $f_5(x) = \tan x$

Alors ces fonctions admettent pour primitives respectives :

$F_1(x) =$	$F_{2}(x) =$	$F_3(x) =$	$F_4(x) =$	$F_{5}(x) =$

Proposition. Soit I un intervalle et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit F_1 et F_2 deux primitives de f. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + C$, i.e.,

$$\forall x \in I \qquad F_2(x) = F_1(x) + C$$

Corollaire. Si F_0 est une primitive de f sur l'intervalle I, alors les primitives de f sont les fonctions $F_0 + C$ où C est une constante.

C. Théorème fondamental

Théorème Fondamental. (Isaac Newton, Angleterre, 1642 – 1727 et Gottfried Leibniz, Allemagne, 1646 – 1716) Soit I un intervalle non-vide, a un point de I, et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors la fonction $\Phi: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction f. $x \longmapsto \int_{a}^{x} f(t) dt$

Remarque. Plus précisément : Φ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Corollaire. Toute fonction continue admet une primitive.

B. Gonard

Exemple 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

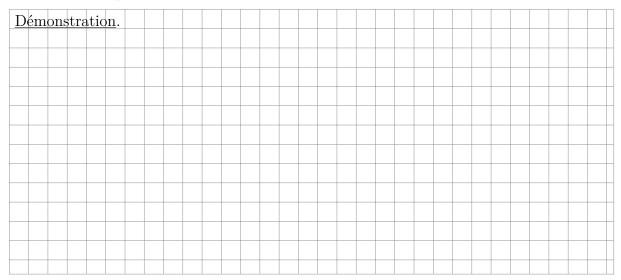
La fonction $f: x \mapsto e^{x^2}$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R} , donc d'après le théorème fondamental la fonction F est une primitive de f, *i.e.*, F est dérivable, de dérivée :



Corollaire. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux points de I. Soit F une primitive de f. Alors :

$$\int_{a}^{b} f(t) dt = F(b) - F(a)$$

On note
$$\left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$
.



Exemple 2 (suite).

(i) $\int_{6}^{9} 4 dt =$ (ii) $\int_{0}^{2} t dt =$ (iii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt =$ (iv) $\int_{0}^{1} e^{t} dt =$ (v) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt =$

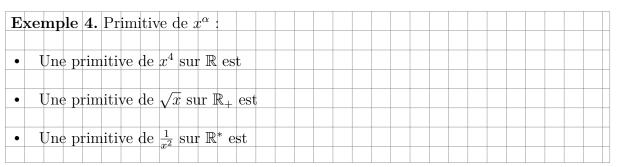
II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

La tableau suivant donne les primitives à connaître. Aucune d'entre elles n'est unique : il est toujours possible de leur ajouter une constante C.

Fonction	Primitive	Ensemble ou condition de validité
x^{α}		$ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_{-} \end{array} $
$(\alpha \neq -1)$		\mathbb{R}_{+}^{*} sinon
$\frac{1}{x}$		\mathbb{R}^*
e^x		\mathbb{R}
$\cos x$		\mathbb{R}
$\sin x$		\mathbb{R}
$\tan x$		$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{ch} x$		\mathbb{R}
$\operatorname{sh} x$		\mathbb{R}
h x		\mathbb{R}
$\frac{1}{1+x^2}$		\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]-1,1[
u'(ax+b)		$ \begin{array}{c} u \text{ d\'erivable} \\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 a \neq 0 \end{array} $
$u'u^{\alpha}$		$\begin{array}{c} u \text{ d\'erivable} \\ \alpha \in \mathbb{R} \alpha \neq -1 \end{array}$
$\frac{u'}{u}$		u dérivable
$u'e^u$		u dérivable
$u'.f \circ u$		u dérivable F primitive de f

B. Gonard



Exemple 5. Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 6x^2 - 5x\sqrt{x} + 4x \qquad f_2(x) = e^{2x-1} \qquad f_3(x) = \frac{1}{(1-x)^5}$$

$$f_4(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \qquad f_5(x) = x(3x^2+1)^2 \qquad f_6(x) = \sinh^2 x \cosh x$$

$$f_7(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} \qquad f_9(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

▷ Exercice 1.

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

Exemple 6.
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin 3x \, dx$$

▷ Exercices 2, 3.

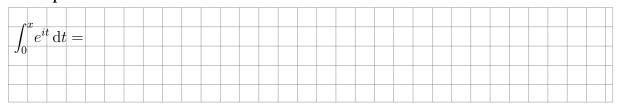
C. Utilisation des complexes

Définition. Une fonction complexe est une fonction à variable réelle et à valeurs complexes, *i.e.*, une fonction $f: D \to \mathbb{C}$ où D est une partie de \mathbb{R} .

Si f est une fonction complexe définie sur un segment [a,b] (avec a et b réels) alors on note :

$$\int_{a}^{b} f(t) dt = \int_{a}^{b} \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_{a}^{b} \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Exemple 7.



Proposition. Soit λ un complexe non-nul. Une primitive de $f: t \mapsto e^{\lambda t}$ est $F: t \mapsto \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}$.

Remarque. En conséquence de la définition ci-dessus :

$$\int_{a}^{b} \operatorname{Re}(f(t)) dt = \operatorname{Re}\left(\int_{a}^{b} f(t) dt\right) \quad \text{et} \quad \int_{a}^{b} \operatorname{Im}(f(t)) dt = \operatorname{Im}\left(\int_{a}^{b} f(t) dt\right)$$

Exemple 8. Primitive de $x \mapsto e^x \cos 2x$

▷ Exercice 4.

D. Fonctions rationnelles

Définitions. Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes.

Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômiales.

Exemple 9.
$$I = \int_0^3 \frac{x+2}{x+1} dx$$
 $J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+3}{x^2+1} dx$

Exercices 5, 6.

Méthode. Calcul d'une intégrale de la forme $\int \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} dx$:

- Calculer le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Selon qu'il soit strictement positif, nul ou strictement négatif, appliquer une des trois méthodes de l'exemple ci-dessous.

Exemple 10.

(i)
$$(\Delta > 0)$$
 $I = \int_{-3}^{-1} \frac{6}{x^2 - 2x} dx$

(ii)
$$(\Delta = 0)$$
 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ puis de $x \mapsto \frac{2x+3}{(x-1)^2}$
(iii) $(\Delta < 0)$ Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+2}$ puis de $x \mapsto \frac{x-2}{x^2+2x+2}$

(iii)
$$(\Delta < 0)$$
 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ puis de $x \mapsto \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 2}$

Exercices 7, 8.

Remarque. Plus généralement, si a_1, \ldots, a_n sont n réels distincts et si P est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à n alors il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x-a_n}$$

Exemple 11.
$$I = \int_3^7 \frac{dx}{(x^2 - 1)(x + 5)}$$

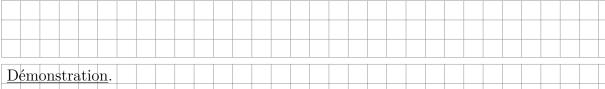
E. Intégration par parties

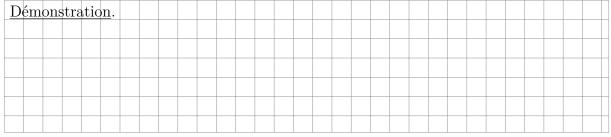
Définition. Une fonction est dite de classe \mathcal{C}^1 si elle est dérivable de dérivée continue.

Théorème. Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle [a,b]. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

ce qui se résume en :





Remarque. Les fonctions u et v doivent être de classe C^1 , ainsi u' et v' sont continues, puis u'v et uv' sont continues, et ainsi les intégrales de ces fonctions sont définies.

Exemple 12.
$$I = \int_0^2 3t e^{2t} dt$$
 $J = \int_1^4 \ln t dt$

Remarque. Une primitive de la fonction ln est : $x \mapsto x \ln x - x$

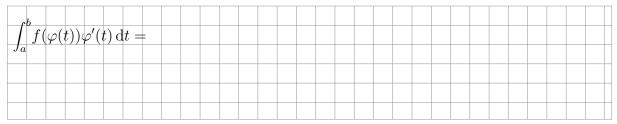
 \triangleright Exercice 9.

F. Changement de variable

Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors :

$$\int_{a}^{b} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

<u>Démonstration</u>. Comme f est continue alors elle admet une primitive. Soit F une primitive de f, alors la fonction $F \circ \varphi$ est dérivable de dérivée $\varphi' \cdot f \circ \varphi$ et donc :



Exemple 13.
$$I = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t^3}{2t+1} dt$$
 en posant $x = 2t+1$
 $J = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \cos t$

Remarque. Le changement de variable consiste à poser $x = \varphi(t)$.

Alors $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ puis $dx = \varphi'(t)dt$.

 \triangleright Exercice 10.