Chapitre A5
Primitives

I. Intégrales et primitives

A. Intégrales

Définition. Soit I un intervalle, a et b deux points de I tels que $a < b$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f$$

est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, et la courbe de f. Les parties situées en-dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.

Si $a > b$ alors on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. La variable t est muette : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f$

Proposition. *(Relation de Chasles) Soit a, b, c sont trois points quelconques d'un intervalle I et f est une fonction continue sur I. Alors :*

Proposition. *(Linéarité) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, et λ un réel. Alors :*

Proposition. *(Inégalité triangulaire) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors :*

Proposition. *(Croissance de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b sont deux points de I tels que $a < b$.*

Exemple 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \cos t \,\mathrm{d}t$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}.$$

B. Primitives

Définition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Une primitive de f est une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ telle que :

- F est dérivable.
- $F' = f$

Exemple 2. Soit :

$$f_1(x) = 4 \qquad f_2(x) = x \qquad f_3(x) = \sin x \qquad f_4(x) = e^x \qquad f_5(x) = \tan x$$

Alors ces fonctions admettent pour primitives respectives :

$F_1(x) =$ $\quad$ $F_2(x) =$ $\quad$ $F_3(x) =$ $\quad$ $F_4(x) =$ $\quad$ $F_5(x) =$

Proposition. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit F_1 et F_2 deux primitives de f. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + C$,* i.e.,

$$\forall x \in I \qquad F_2(x) = F_1(x) + C$$

Corollaire. *Si F_0 est une primitive de f sur l'intervalle I, alors les primitives de f sont les fonctions $F_0 + C$ où C est une constante.*

C. Théorème fondamental

Théorème Fondamental. (Isaac Newton, Angleterre, 1642 – 1727 et Gottfried Leibniz, Allemagne, 1646 – 1716) *Soit I un intervalle non-vide, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Alors la fonction $\begin{array}{rcl} \Phi : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ *est une primitive de la fonction f.*

Remarque. Plus précisément : Φ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Corollaire. *Toute fonction continue admet une primitive.*

Exemple 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

La fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental la fonction F est une primitive de f, *i.e.*, F est dérivable, de dérivée :

$$F'(x) =$$

Corollaire. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux points de I. Soit F une primitive de f. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

On note $\Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration.

Exemple 2 (suite).

(i) $\displaystyle\int_6^9 4\,\mathrm{d}t =$

(ii) $\displaystyle\int_0^2 t\,\mathrm{d}t =$

(iii) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t =$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t =$

(v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t =$

II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

La tableau suivant donne les primitives à connaître. Aucune d'entre elles n'est unique : il est toujours possible de leur ajouter une constante C.

Fonction	Primitive	Ensemble ou condition de validité
x^α $(\alpha \neq -1)$		$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\dfrac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$
e^x		$\mathbb{R}$
$\cos x$		$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{ch} x$		$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$]-1, 1[$
$u'(ax+b)$		u dérivable $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad a \neq 0$
$u'u^\alpha$		u dérivable $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq -1$
$\dfrac{u'}{u}$		u dérivable
$u'e^u$		u dérivable
$u'.f \circ u$		u dérivable F primitive de f

Exemple 4. Primitive de x^α :

- Une primitive de x^4 sur $\mathbb{R}$ est
- Une primitive de $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ est
- Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ est

Exemple 5. Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 6x^2 - 5x\sqrt{x} + 4x \qquad f_2(x) = e^{2x-1} \qquad f_3(x) = \frac{1}{(1-x)^5}$$

$$f_4(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \qquad f_5(x) = x(3x^2+1)^2 \qquad f_6(x) = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x$$

$$f_7(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} \qquad f_9(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

▷ **Exercice 1.**

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

Exemple 6. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x$

▷ **Exercices 2, 3.**

C. Utilisation des complexes

Définition. Une fonction complexe est une fonction à variable réelle et à valeurs complexes, *i.e.*, une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction complexe définie sur un segment $[a, b]$ (avec a et b réels) alors on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Exemple 7.

$$\int_0^x e^{it}\,\mathrm{d}t =$$

Proposition. *Soit λ un complexe non-nul. Une primitive de $f : t \mapsto e^{\lambda t}$ est $F : t \mapsto \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}$.*

Remarque. En conséquence de la définition ci-dessus :

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exemple 8. Primitive de $x \mapsto e^x \cos 2x$

▷ **Exercice 4.**

D. Fonctions rationnelles

Définitions. Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes.
Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômiales.

Exemple 9. $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

▷ **Exercices 5, 6.**

Méthode. Calcul d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int \frac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$:

- Calculer le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
- Selon qu'il soit strictement positif, nul ou strictement négatif, appliquer une des trois méthodes de l'exemple ci-dessous.

Exemple 10.

(i) $(\Delta > 0)$ $\quad I = \displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{6}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$

(ii) $(\Delta = 0)$ Primitive de $\quad x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2} \quad$ puis de $\quad x \mapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)^2}$

(iii) $(\Delta < 0)$ Primitive de $\quad x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2} \quad$ puis de $\quad x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2+2x+2}$

▷ **Exercices 7, 8.**

Remarque. Plus généralement, si $a_1,\dots,a_n$ sont n réels distincts et si P est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à n alors il existe des scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tels que :

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x-a_n}$$

Exemple 11. $I = \displaystyle\int_3^7 \frac{dx}{(x^2-1)(x+5)}$

E. Intégration par parties

Définition. Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est dérivable de dérivée continue.

Théorème. *Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui se résume en :

Démonstration.

Remarque. Les fonctions u et v doivent être de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi u' et v' sont continues, puis $u'v$ et uv' sont continues, et ainsi les intégrales de ces fonctions sont définies.

Exemple 12. $I = \displaystyle\int_0^2 3te^{2t}\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_1^4 \ln t\,\mathrm{d}t$

Remarque. Une primitive de la fonction ln est : $x \mapsto x\ln x - x$

▷ **Exercice 9.**

F. Changement de variable

Théorème. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Comme f est continue alors elle admet une primitive. Soit F une primitive de f, alors la fonction $F \circ \varphi$ est dérivable de dérivée $\varphi' \cdot f \circ \varphi$ et donc :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t =$$

Exemple 13. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t^3}{2t+1}\mathrm{d}t$ en posant $x = 2t+1$

$J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \cos t$

Remarque. Le changement de variable consiste à poser $x = \varphi(t)$.
Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ puis $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

▷ **Exercice 10.**