Corrigé du Devoir à la Maison n°3

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par : $\quad f(x) = \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$

1. La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et la fonction arc-tangente est définie sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Les fonctions polynomiales et la fonction arc-tangente sont dérivables sur leurs ensembles de définitions, donc par quotient et composition la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Cette dérivée est strictement positive, donc f est strictement croissante sur tout intervalle, c'est-à-dire sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

Pour ses limites en $\pm\infty$ on remarque que $f(x) = \arctan \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, ce qui montre que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan \frac{\pi}{4} = 1$$

De plus, comme :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x-1}{x+1} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

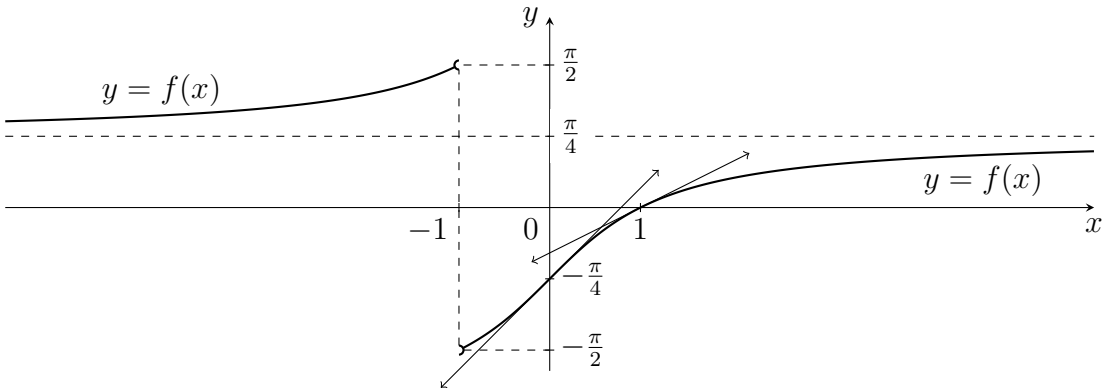
alors par composition de limites :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Tout ceci peut être consigné dans le tableau suivant, auquel on a ajouté les valeurs de f et f' en 0 et en 1.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	1	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$ ‖ $-\frac{\pi}{2}$	↗	$-\frac{\pi}{4}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{4}$

3. On obtient la courbe suivante.



4. On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad f'(x) = \arctan' x$$

Par théorème les fonctions f est arctan sont égales à une constante près sur tout intervalle.
Or $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est l'union disjointe des deux intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$, donc il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$\begin{array}{rll} & \forall x \in]-\infty, -1[& f(x) = \arctan x + K_1 \\ \text{et} & \forall x \in]-1, +\infty[& f(x) = \arctan x + K_2. \end{array}$$

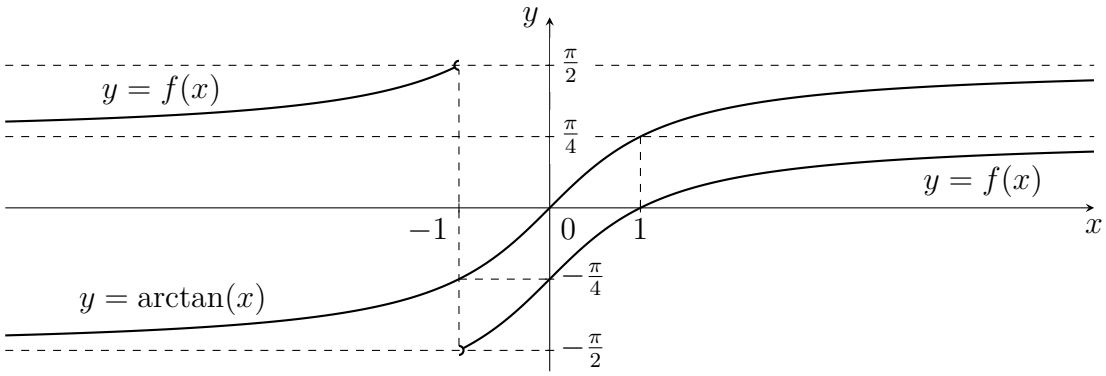
Comme :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} (\arctan x + K_1) = -\frac{\pi}{2} + K_1$$

alors par unicité de la limite $\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + K_1$, et donc $K_1 = \frac{3\pi}{4}$.
Comme $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ et $\arctan(0) + K_2 = K_2$ alors $K_2 = -\frac{\pi}{4}$.
On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad f(x) = \begin{cases} \arctan x + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x < -1 \\ \arctan x - \frac{\pi}{4} & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Ceci permet de tracer la courbe de f à partir de celle de l'arc-tangente.
La partie pour $x \in]-\infty, -1[$ s'obtient par addition de $\frac{3\pi}{4}$ alors que la partie pour $]-1, +\infty[$ s'obtient par soustraction de $\frac{\pi}{4}$.



5. (a) On sait que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan\tan x = x \tag{1}$$

Soit $\theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$. Alors : $-\frac{3\pi}{4} \leqslant \theta < -\frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta + \pi < \frac{\pi}{2}$.
Ainsi $(\theta + \pi) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc d'après (1) :

$$\arctan\tan(\theta + \pi) = \theta + \pi$$

La fonction tangente est π-périodique donc $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ et donc :

$$\forall \theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan\tan\theta = \theta + \pi$$

(b) Comme $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$ alors $\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.
Ceci montre que $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\theta$ sont définis.
La formule d'addition pour la tangente donne :

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\theta\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1}.$$

On en déduit :

$$f(\tan\theta) = \arctan\frac{\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1} = \arctan\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2}$$

(c) Soit $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Soit $\theta = \arctan x$. Comme arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, alors $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$
De plus, comme $\theta = \arctan x$ alors $\tan\theta = x$.

- Si $x \in]-\infty, -1[$ alors $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$, donc $\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$ et d'après la question (5a) :

$$\arctan\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \pi = \theta + \frac{3\pi}{4}$$

Puis d'après (2) :

$$f(\tan\theta) = \theta + \frac{3\pi}{4}$$

On en déduit :

$$f(x) = \arctan x + \frac{3\pi}{4}$$

- Si $x \in]-1, +\infty[$ alors $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[\subseteq \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et d'après (1) et (2) :

$$f(\tan\theta) = \theta - \frac{\pi}{4}$$

On en déduit :

$$f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$$

On a démontré de nouveau :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad f(x) = \begin{cases} \arctan x + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x < -1 \\ \arctan x - \frac{\pi}{4} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin \operatorname{th} x + \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

1. Les fonctions th et ch sont définies sur $\mathbb{R}$, et vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \operatorname{ch} x$$

Les fonctions arcsin et arccos sont définies sur $[-1, 1]$. D'après ce qui précède :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \frac{1}{\operatorname{ch} x} \leqslant 1$$

Ceci montre que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions th, ch, arcsin, arccos sont continues. Par quotient, composition et somme la fonction f est continue.

Les fonctions th et ch sont dérivables. La fonction ch est égale à 1 en 0 et uniquement en 0, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1 \qquad \text{et} \qquad 1 < \operatorname{ch} x$$

Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \frac{1}{\operatorname{ch} x} < 1$$

Par quotient, composition et somme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2. On obtient :

$$f(0) = \arcsin \operatorname{th} 0 + \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} 0} = \arcsin 0 + \arccos 1 = 0$$

Ensuite on calcule :

$$\operatorname{th} \frac{\ln 3}{2} = \frac{e^{\ln 3} - 1}{e^{\ln 3} + 1} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{ch} \frac{\ln 3}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} + e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Donc :

$$f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

et :

$$f\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0$$

3. (a) Pour tout réel t non-nul $\frac{t}{|t|}$ est le signe de t.

La fonction sh est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x|} = \operatorname{sgn}(x)$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On sait que $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ et $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} + \frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{|\operatorname{ch} x|}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x|} \end{aligned}$$

On sait que $\operatorname{ch} x$ est strictement positif donc en utilisant la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}(1 + \operatorname{sgn}(x))$$

Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. D'après la question précédente la fonction f est constante que $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour le calcul de ses limites, on sait que :

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$$

   Par composition de limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arcsin(-1) + \arccos 0 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arcsin 1 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

   Tout ceci figure dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		0	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\longrightarrow$	0	$\nearrow$	π

5. Nous venons de voir que f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme $f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = 0$ alors elle est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et même en 0 car $f(0) = 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad f(x) = 0.$$

   On peut donc calculer :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{0}{x} = 0$$

   Donc f est dérivable à gauche en 0, de dérivée $f'_g(0) = 0$.

6. (a) Soit $g(x) = 4 \arctan e^x - \pi$.
   La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. Par composition elle est dérivable. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \frac{4e^x}{1 + e^{2x}} = 2\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\operatorname{ch} x}$$

   On constate que $f' = g'$ sur $\mathbb{R}_+$, ou $(f - g)' = 0$.

Ceci montre que la fonction $(f-g)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle. Comme elle est continue alors elle est constante sur $\mathbb{R}_+$.
Or on calcule $g(0) = 4\arctan 1 - \pi = 0$, donc la fonction $(f-g)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$, et ainsi $f = g$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = 4\arctan e^x - \pi$$

(b) La fonction exponentielle est dérivable en 0, de dérivée $e^0 = 1$, donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

La fonction arctan est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. En particulier elle est dérivable en 1 de dérivée $\frac{1}{2}$. Comme $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ceci donne :

$$\lim_{h\to 1} \frac{\arctan h - \frac{\pi}{4}}{h-1} = \frac{1}{2}.$$

(c) On utilise l'expression de f obtenue dans la question (6a) ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{4\arctan e^x - \pi}{x}$$

On écrit alors :

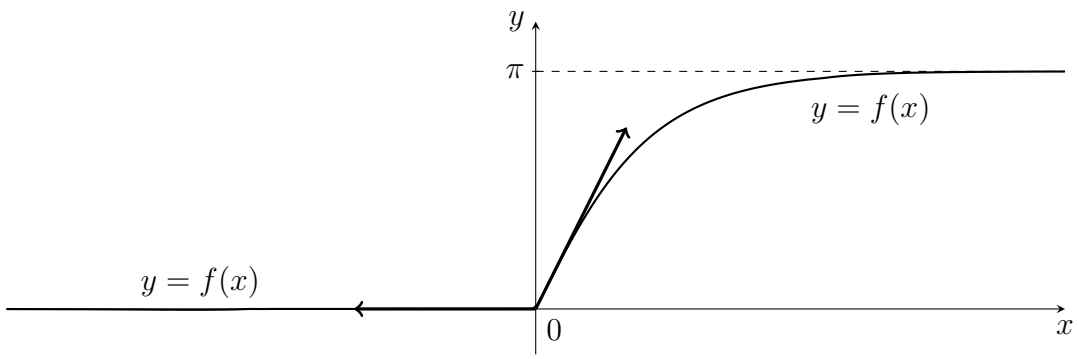
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 4\frac{\arctan e^x - \frac{\pi}{4}}{e^x - 1} \times \frac{e^x - 1}{x}$$

Les limites calculées dans la question précédente montrent que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$$

Alors f est dérivable à droite en 0, de dérivée $f'_d(0) = 2$.

7. On obtient la courbe suivante.



8. (a) Soit $y \in [0, \pi[$. On résout l'équation $f(x) = y$, avec $x \in \mathbb{R}_+$.
On utilise l'expression obtenue dans la question (6a) :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = y \quad &\iff \quad 4 \arctan e^x - \pi = y \\ &\iff \quad \arctan e^x = \frac{y+\pi}{4} \end{aligned}$$

Comme $y \in [0, \pi[$ alors $\frac{y+\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, et donc $\frac{y+\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui justifie :

$$\arctan e^x = \frac{y+\pi}{4} \qquad \iff \qquad e^x = \tan \frac{y+\pi}{4}$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = y \quad \iff \quad x = \ln \tan \frac{y+\pi}{4}$$

Comme $\frac{y+\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\tan \frac{y+\pi}{4} \in [1, +\infty[$ et donc $x \in \mathbb{R}_+$.
On a démontré que tout élément y de $[0, \pi[$ admet un et un seul antécédent par f dans $\mathbb{R}_+$.
Ceci montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, \pi[$, et que sa réciproque est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0, \pi[\ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \ &\longmapsto \ln \tan \tfrac{x+\pi}{4} \end{aligned}$$

(b) Les fonctions ln et tan sont dérivables, donc par composition f^{-1} est dérivable, de dérivée :

$$\forall x \in [0, \pi[\qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1 + \tan^2 \frac{x+\pi}{4}}{4 \tan \frac{x+\pi}{4}}$$

Grâce aux formules de trigonométrie :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\cos^2 \frac{x+\pi}{4} + \sin^2 \frac{x+\pi}{4}}{4 \cos \frac{x+\pi}{4} \sin \frac{x+\pi}{4}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x+\pi}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

9. (a) On calcule :

$$\operatorname{th} \ln t = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch} \ln t = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{1 + t^2}{2t}$$

Ceci donne :

$$f(\ln t) = \arcsin \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + \arccos \frac{2t}{1 + t^2}$$

On reconnait les formules en $t = \tan \frac{\theta}{2}$. Si $t = \tan \frac{\theta}{2}$ alors :

$$f(\ln t) = \arcsin(-\cos \theta) + \arccos(\sin \theta)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} f(\ln t) &= -\arcsin(\cos \theta) + \arccos(\sin \theta) \\ &= -\pi + \arccos(\cos \theta) + \pi - \arcsin(\sin \theta) \\ &= \arccos(\cos \theta) - \arcsin(\sin \theta) \end{aligned}$$

Comme $\theta \in]0, \pi[$ alors $\theta \in [0, \pi]$ et donc :

$$f(\ln t) = \theta - \arcsin(\sin(\theta))$$

(b) On différencie deux cas :

- Si $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc :

$$\arcsin(\sin\theta) = \theta$$

- Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors $(\pi - \theta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $(\pi - \theta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\arcsin(\sin(\pi - \theta)) = \pi - \theta$$

  Par propriété $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ donc :

$$\arcsin(\sin\theta) = \pi - \theta$$

On a donc obtenu :

$$\forall \theta \in]0, \pi[\qquad \arcsin\sin\theta = \begin{cases} \theta & \text{si } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - \theta & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$$

(c) Comme $\theta \in]0, \pi[$ alors $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui montre que :

$$t = \tan\frac{\theta}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arctan t = \frac{\theta}{2}$$

Comme $x = \ln t$ alors $t = e^x$, donc $\theta = 2\arctan e^x$.
La question (9a) a établi :

$$f(x) = \theta - \arcsin(\sin\theta)$$

La question (9b) donne alors :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2\theta - \pi & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$$

Comme $\theta = 2\arctan e^x$ alors :

$$\begin{array}{lllllllll} & x \leqslant 0 & \Longrightarrow & 0 < e^x \leqslant 1 & \Longrightarrow & 0 < \arctan e^x \leqslant \frac{\pi}{4} & \Longrightarrow & 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \text{et} & x \geqslant 0 & \Longrightarrow & 1 \leqslant e^x & \Longrightarrow & \frac{\pi}{4} \leqslant \arctan e^x < \frac{\pi}{2} & \Longrightarrow & \frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi \end{array}$$

On retrouve donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 4\arctan e^x - \pi & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$