Lycée Bellevue – Toulouse **23 novembre 2023**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°3

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

Exercice. *(5 points)*

On souhaite résoudre l'équation (E) : $\arccos(5x-1) = \arcsin x$.

1. Sur quel ensemble cette équation est-elle définie ?
2. Démontrer qu'elle possède au moins une solution.
3. Résoudre l'équation (E).

Problème 1. *(23 points)*

Partie A. *(4 points)*

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications.
On note $h = g \circ f$ et on suppose que h est bijective.

1. Démontrer que f est injective.
2. Démontrer que g est surjective.
3. Démontrer que si f est bijective alors g est bijective, et exprimer sa réciproque en fonction de f et de h.

Ce dernier résultat sera utilisé dans la partie C.

Partie B. *(8 points)*

On définit les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \operatorname{ch} x \end{array}$$

1. Justifier que f et g sont bien définies.
2. Démontrer que f est injective mais non surjective.
3. Démontrer que g est surjective mais non injective.
4. Justifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, et les calculer.
   La fonction g est-elle la réciproque de f ?

Partie C. *(11 points)*

On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

1. Justifier que f est bien définie et que son image est incluse dans l'intervalle $]0,\pi[$.
2. On pose $g = f \circ \operatorname{sh}$.
   (a) Simplifier l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.

   (b) Démontrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,\pi[$ et donner sa réciproque.
   (c) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,\pi[$, donner une forme simple de sa réciproque.

3. (a) Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire une expression simple de f.
   (c) À l'aide de cette expression répondre de nouveau à la question (2c).
   (d) Tracer la courbe représentative de f ainsi que celle de sa réciproque.

Problème 2. *(15 points)*

Dans ce problème on étudie l'ensemble des entiers $n > 0$ tels que n divise $2^n + 1$:

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \text{ divise } 2^n + 1\}$$

1. Justifier que tout élément de $\mathcal{E}$ est impair.
2. Déterminer les trois plus petits éléments de $\mathcal{E}$.
3. (a) Calculer 9×19 puis donner la division euclidienne de 2^9 par 9×19.
   (b) En déduire que $9 \times 19 \in \mathcal{E}$.
4. Soit n un élément de $\mathcal{E} \setminus \{1\}$, et soit p un diviseur premier de n.
   (a) Démontrer que $2^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.
   (b) Démontrer que $2^{2n} \equiv 1 \ [p]$.
   (c) En déduire que $2^{(p-1)\wedge(2n)} \equiv 1 \ [p]$.

   On suppose maintenant que p est le plus petit diviseur premier de n.

   (d) Démontrer que $(p-1) \wedge (2n) = 2$.
   (e) En déduire que $p = 3$.

   On a démontré que tout élément de $\mathcal{E}$ autre que 1 est multiple de 3.
5. Soit n et u deux entiers naturels avec u impair.
   (a) Démontrer que $2^n + 1$ divise $2^{nu} + 1$.
   (b) Démontrer que $\frac{2^{nu}+1}{2^n+1} \equiv u \ [2^n + 1]$.
6. Soit m et n deux éléments de $\mathcal{E}$.
   (a) Justifier qu'il existe u et v impairs tels que $m \vee n = un = vm$.
   (b) En déduire que $m \vee n \in \mathcal{E}$.

   On a démontré que $\mathcal{E}$ est stable par PPCM.
7. Soit m et n deux éléments de $\mathcal{E}$.
   (a) Soit d un diviseur de n. Démontrer que $dn \in \mathcal{E}$.
   (b) Exprimer le produit mn en fonction de $m \wedge n$ et $m \vee n$.
   En déduire que $mn \in \mathcal{E}$.

   On a démontré que $\mathcal{E}$ est stable par produit.
8. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 3^k \in \mathcal{E} \qquad \text{et} \qquad \forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } k \geqslant 2 \qquad 3^k \times 19^\ell \in \mathcal{E}$$

Le plus petit nombre de $\mathcal{E}$ qui n'est pas de cette forme est $13\,203 = 3^4 \times 163$, le nombre 163 étant premier.