Lycée Bellevue – Toulouse
MPSI – Mathématiques

pour le 4 décembre 2023

Devoir à la Maison n°5

Partie A : Irrationalité de e

Le but de cette partie est de démontrer que e est irrationnel : $e \notin \mathbb{Q}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^1 t^n e^t \, \mathrm{d}t$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n l'intégrale I_n est bien définie.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
   (b) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.
   (c) Il semble que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux entiers a_n et b_n tels que $I_n = a_n e + b_n$.
   Démontrer cette conjecture.
3. Encadrer la fonction $t \mapsto e^t$ sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

4. On suppose qu'il existe deux entiers p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.
   Comme e est strictement positif on peut supposer que p et q sont strictement positifs.
   (a) Justifier que qI_p est un entier.
   (b) Encadrer cet entier et conclure.

Partie B.

Le but de cette partie est de démontrer que : $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$J_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{1-t} \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Justifier que pour tout entier naturel n le réel J_n est bien défini.
   Calculer J_0.
2. (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{(n+1)!} \leqslant J_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

   (b) Que peut-on en déduire sur la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = J_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$.
   (b) En déduire une expression de J_n en fonction de u_n puis conclure cette partie.