Chapitre A7
Suites

I. Généralités

A. Notations

Une suite indexée par $\mathbb{N}$ est une application :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

On note u_n l'image de l'entier n par l'application u, au lieu de $u(n)$.

Une suite peut être notée : u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_0, u_1, u_2, \ldots)$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On considère parfois des suites indexées par $\mathbb{N}^*$. Par exemple $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ est implicitement indexée par $\mathbb{N}^*$.

Modes de définition :

On peut définir une suite de plusieurs façons :

- Définition explicite : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n - 2$
- Définition par récurrence : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2/2$
- Définition implicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution positive de l'équation $x^n + x - 1$.

B. Opérations

- Addition : si u et v sont deux suites, alors $u + v$ est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u+v)_n = u_n + v_n \qquad \text{ou} \qquad u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$$

- Multiplication : si u et v sont deux suites, alors uv est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (uv)_n = u_n v_n \qquad \text{ou} \qquad uv = (u_0 v_0, u_1 v_1, \ldots)$$

- Multiplication par un scalaire : si u est une suite et λ un réel alors λu est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\lambda u)_n = \lambda u_n \qquad \text{ou} \qquad \lambda u = (\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots)$$

C. Définitions de base

Définitions. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

constante si

croissante si

décroissante si

monotone si

strictement croissante si

strictement décroissante si

strictement monotone si

majorée si

minorée si

bornée si

périodique si

stationnaire si

Remarques.

(i) Si λ est un réel, on note $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à λ.

(ii) La suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

(iii) On dit qu'une propriété sur une suite (u_n) est vraie à partir d'un certain rang si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que cette propriété est vraie pour tout $n \geqslant N$.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang si :

▷ **Exercice 1.**

II. Suites classiques

A. Suites arithmétiques

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r}$$

On dit alors que r est la raison de la suite arithmétique (u_n).

Proposition. *Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr}$$

Remarque. La somme des premiers termes d'une suite arithmétique se déduit de la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

B. Suites géométriques

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n}$$

On dit alors que q est la raison de la suite géométrique (u_n).

Proposition. *Le terme général d'une suite géométrique (u_n) de raison q est :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n}$$

Proposition. *La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$*
- *converge vers 0 si $|q| < 1$*
- *converge vers 1 si $q = 1$*
- *diverge dans tous les autres cas.*

Proposition - Somme des termes d'une suite géométrique. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers m, M tels que $0 \leqslant m \leqslant M$:*

C. Suites arithmético-géométriques

Définition. Une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b}$$

Remarque. On suppose dans la suite que $a \neq 1$ (sinon la suite est arithmétique).

Méthode.

- Introduire le réel γ tel que $\gamma = a\gamma + b$.
- Vérifier que la suite $(v_n) = (u_n - \gamma)$ est géométrique.
- En déduire le terme général de (v_n), puis celui de (u_n).

Exemple 1. Déterminer le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4$$

▷ **Exercice 2.**

D. Suites double-récurrentes linéaires

Définition. Une suite double-récurrente linéaire est définie par la donnée de u_0, u_1 et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + \mu u_n$$

où λ et μ sont deux scalaires.

Remarque. On se ramène à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

avec a non-nul.

Définition. On définit l'équation caractéristique associée à la suite :

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Théorème. *Avec les notations précédentes, en notant Δ le discriminant de (C) :*

- *Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation (C) admet deux solutions λ_1 et λ_2. Le terme général de la suite (u_n) est :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$
où α et β sont deux constantes.
- *Si $\Delta = 0$ alors l'équation (C) admet une unique solution λ_0. Le terme général de la suite (u_n) est :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha n + \beta)\lambda_0^n$$
où α et β sont deux constantes.

Méthode. Les constantes α et β sont calculées grâce aux valeurs de u_0 et u_1.

Exemple 2. Déterminer le terme général des suites définies par :

$$\begin{array}{llll} \textit{(i)} & u_0 = -2 & u_1 = -1 & \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n \\ \textit{(ii)} & v_0 = -1 & v_1 = 1 & \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n \end{array}$$

▷ **Exercices 3, 4.**

III. Limites

A. Compléments sur les réels

Propriété de la borne supérieure. (Axiome admis)

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Propriété de la borne inférieure.

Toute partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant.

Définitions. Soit A une partie non-vide majorée. On appelle borne supérieure de A le plus petit de ses majorants. On le note $\mathrm{Sup}(A)$.

Soit A une partie non-vide minorée. On appelle borne inférieure de A le plus grand de ses minorants. On le note $\mathrm{Inf}(A)$.

Remarque. La propriété de la borne supérieure n'est pas vérifiée par $\mathbb{Q}$.

Proposition. *Soit A une partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ et s un réel. Alors $s = \mathrm{Sup}(A)$ si et seulement si :*

Remarques.

(i) On dit *un* majorant et *la* borne supérieure.

(ii) Si $s = \mathrm{Sup}\, A$ et M est un majorant de A alors

▷ **Exercices 5, 6, 7.**

Proposition - Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et b un majorant de A* appartenant à *A. Alors b est la borne supérieure de A.*

On dit que b est le maximum de A, et on note $b = \mathrm{Max}(A)$.

De même, si a est un minorant de A appartenant à A alors a est la borne inférieure de A. On dit que a est le minimum de A et on note $a = \mathrm{Min}(A)$.

Exemple 3. L'intervalle $[-5, 4[$ admet un minimum mais pas de maximum.

Remarque. Si une partie A est finie et non-vide alors elle admet un minimum et un maximum.

Définition. Si une suite (u_n) est majorée, alors sa borne supérieure est le plus petit de ses majorants. C'est le réel s tel que :

Remarques.

(i) En d'autres termes la borne supérieure de la suite (u_n) est la borne supérieure de l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) On définit de même la borne inférieure, le maximum et le minimum d'une suite.

Notations. On note ces réels, s'il sont définis : $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ $\max_{n\in\mathbb{N}} u_n$ $\min_{n\in\mathbb{N}} u_n$

▷ **Exercice 8.**

Résumé. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Un majorant de A est un réel plus grand que tous les éléments de A.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- La maximum est la borne supérieure lorsqu'elle appartient à A.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- Un majorant de (u_n) est un réel plus grand que tous les éléments de u_n.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- La maximum est un u_n plus grand que tous les autres.

B. Suites convergentes

Définitions. Soit ℓ un réel. On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ si :

On note alors : $u_n \to \ell$

On dit qu'une suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

▷ **Exercice 9.**

Proposition (Unicité de la limite). *Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.*

Définition. Si (u_n) converge vers ℓ alors on dit que ℓ est la limite de la suite (u_n). On note :

$$\lim u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration dans le cas réel.

Remarque. Dans le cas où (u_n) est une suite à valeurs complexes, on utilise l'inégalité triangulaire. Si

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

alors :

$$|\ell' - \ell| = |(u_n - \ell) - (u_n - \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

On obtient une contradiction en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell - \ell'|$.

Exemple 4. Soit (u_n) une suite d'entiers : $(u_n) \subseteq \mathbb{Z}$.
Démontrer que si (u_n) est convergente alors elle est stationnaire.

Théorème. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration.

▷ **Exercice 10.**

C. Opérations sur les limites

Théorème. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites ℓ et ℓ'. Soit λ un réel. Alors*

(i) La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

(ii) La suite (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.

(iii) La suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

(iv) La suite $|u_n|$ converge vers $|\ell|$.

(v) Si $\ell \neq 0$, alors la suite (u_n) est non-nulle à partir d'un certain rang, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Corollaire. *De plus :*

(vi) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.
En d'autres termes, les combinaisons linéaires des suites (u_n) et (v_n) convergent.

(vii) Si $\ell' \neq 0$ alors la suite quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration du corollaire.

Le point *(vi)* est conséquence des points *(ii)* et *(i)*.

Le point *(vii)* est conséquence des points *(v)* et *(iii)*. □

Lemme 1. *Une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.*

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 2. *Si (u_n) est une suite convergeant vers 0 et (v_n) est une suite bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

Démonstration.

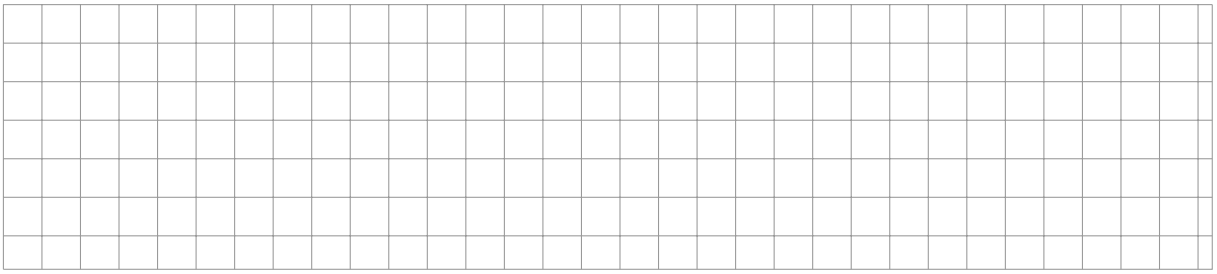
Démonstration du théorème.

(i)

(ii) La suite constante (λ) est bornée, donc d'après le lemme 2 si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (λu_n) converge vers 0.

Maintenant si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors d'après le lemme 1 la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0, donc la suite $(\lambda u_n - \lambda\ell)$ converge vers 0, et ainsi la suite (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.

(iii) On écrit :



La suite (v_n) est bornée car convergente, la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0 d'après le lemme 1, donc d'après le lemme 2 la suite $(v_n(u_n - \ell))$ converge vers 0.

La suite $(v_n - \ell')$ converge vers 0 d'après le lemme 1, donc la suite $(\ell(v_n - \ell'))$ converge vers 0 d'après le *(ii)*.

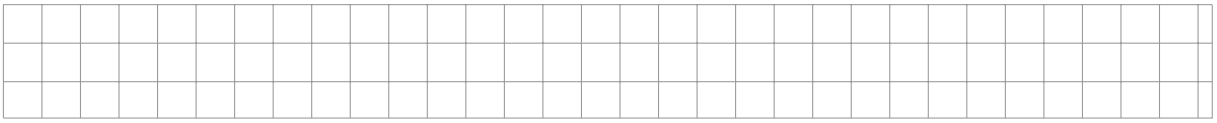
D'après le *(i)*, la suite $(v_n(u_n - \ell) + \ell(v_n - \ell'))$ converge vers 0.

D'après le lemme 1, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

(iv) On utilise l'inégalité triangulaire :

$$||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$$

(v) D'après l'exercice 10 la suite (u_n) est non-nulle à partir d'un certain rang. On écrit :



Comme la suite (ℓu_n) converge vers ℓ^2 qui est non-nul, alors elle est bornée à partir d'un certain rang par deux réels strictement positifs. La suite $\left(\frac{1}{\ell u_n}\right)$ est donc également bornée.

De plus la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0 donc par produit alors la suite $\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right)$ converge vers 0, et ainsi la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. □

D. Limites et inégalités

Lemme. *Soit (w_n) une suite convergente.*
Si (w_n) est positive à partir d'un certain rang alors $\lim w_n$ *est positive.*
Si (w_n) est négative à partir d'un certain rang alors $\lim w_n$ *est négative.*

Démonstration.

Théorème de comparaison.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.
(i) Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$ *alors* $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.
(ii) Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ *alors* $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

Démonstration. Le [ ] est conséquence du [ ] donc il suffit de démontrer celui-ci.

On pose $w_n = v_n - u_n$. Alors la suite (w_n) est positive à partir d'un certain rang, et par opérations sur les limites elle converge vers $\lim v_n - \lim u_n$.

On déduit du lemme précédent que la limite de w_n est positive, donc $\lim u_n \leqslant \lim v_n$. □

Remarque. L'implication $(\forall n \geqslant N \quad u_n < v_n) \implies \lim u_n < \lim v_n$ est fausse.

Exemple. Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < v_n$
Pourtant la limite de (u_n) n'est pas strictement inférieure à celle de (v_n), puisqu'elles valent 1 toutes les deux.

E. Limites infinies

Définition. Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

On note alors : $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$

Une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si :

On note alors : $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \to -\infty$

Remarque. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors $(-u_n)$ tend vers $-\infty$, et vice-versa.
Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (λu_n) tend vers $\text{sgn}(\lambda)\infty$.

Définitions. On dit qu'une suite admet une limite si elle converge ou tend vers $\pm\infty$.
Dans ce cas sa limite est élément de :

Cet ensemble est appelé droite numérique achevée.

Théorème.

(i) Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

(ii) Si la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement positive à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.
Si la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement négative à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $-\infty$.

Démonstration.
(i)

(ii) Supposons que la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement positive à partir d'un certain rang.

Soit A un réel.

Si A est négatif alors il est clair qu'à partir d'un certain rang : $\left|\frac{1}{u_n}\right| \geqslant A$.

Si A est strictement positif alors $\varepsilon = \frac{1}{A}$ est strictement positif, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant \frac{1}{A}$$

Ceci donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \geqslant A$$

Comme u_n est strictement positive à partir d'un certain rang alors quitte à augmenter N on peut supposer que $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n}$.

On a démontré que

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{u_n} > A$$

donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.

Le cas où (u_n) est strictement négative à partir d'un certain rang se déduit de ce cas en remplaçant u_n par $-u_n$. □

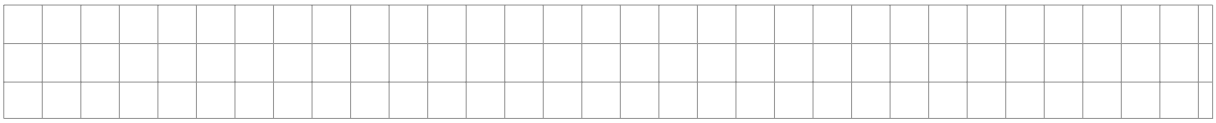
Rappel : Calculs de limites.

(i) Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée (par exemple parce qu'elle est convergente, ou tend vers $+\infty$), alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

(ii) Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est positive à partir d'un certain rang (par exemple parce qu'elle converge vers un réel positif ou tend vers $+\infty$) alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.

etc.

Les formes indéterminées sont :



Exemple 5. Dans les cas ci-dessus toutes les limites sont possibles.

▷ **Exercices 11, 12.**

IV. Théorèmes d'existence de limite

A. Encadrement

Théorème de divergence par comparaison.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites, telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

(i) Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$.
(ii) Si (v_n) tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Démonstration.

Théorème d'encadrement.
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

i.e., $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *à partir d'un certain rang.*
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Remarque. Ce théorème est un théorème d'existence de limite, il prouve d'abord que la suite (v_n) est convergente, puis qu'elle converge vers ℓ.

Exemple 6. Soit (u_n) et (v_n) deux suites *positives* telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n$$

Si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0.

Démonstration.

Exemple 7. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$ où x est un réel.

▷ **Exercice 13.**

B. Suites monotones

Rappel. Selon la propriété de la borne supérieure, toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant.

Théorème. *Toute suite monotone admet une limite. Plus précisément :*
Soit (u_n) une suite croissante.
(i) Si (u_n) est majorée alors elle est convergente.
(ii) Si (u_n) n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
Soit (u_n) une suite décroissante.
(i) Si (u_n) est minorée alors elle est convergente.
(ii) Si (u_n) n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration. Supposons que la suite (u_n) est croissante.

On démontre le théorème dans le cas où la suite (u_n) est décroissante de la même façon, ou en appliquant le théorème pour la suite $(-u_n)$. □

Théorème (complément).

- *Une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.*
- *Une suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.*

Proposition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide majorée. Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers* $\operatorname{Sup} A$.

Démonstration. Soit $s = \operatorname{Sup} A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le réel $s - \frac{1}{n}$ est strictement inférieur à s. Il existe donc $a_n \in A$ tel que $a_n > s - \frac{1}{n}$.

Or comme a_n appartient à A et $s = \operatorname{Sup} A$ alors $a_n \leqslant s$. On en déduit $s - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant s$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |s - a_n| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers s. □

C. Applications

1) Lien avec la densité

Proposition - Caractérisation séquentielle de la densité.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient un élément de A.

(ii) Pour tout réel x il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers x.

Démonstration. Supposons que le point *(i)* est satisfait. Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ est un intervalle non réduit à un point, donc il contient un élément de A. Notons a_n un tel élément.

On a construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n - x| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement cette suite converge vers x. Le point *(ii)* est démontré.

Supposons que la partie A satisfait le point *(ii)*. Soit I un intervalle non réduit à un point. Alors cet intervalle contient deux points a et b tels que $a < b$. Posons $c = \frac{a+b}{2}$, et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Alors ε est strictement positif, $c - \varepsilon = a$ et $c + \varepsilon = b$.

Comme c est un réel alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers c. En conséquence, comme $\varepsilon > 0$ alors il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - c| \leqslant \varepsilon$$

Ceci donne $c - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant c + \varepsilon$, donc $a_n \in [a, b]$. Comme a et b sont deux éléments de I et I est un intervalle alors $[a, b] \subseteq I$, donc $a_n \in I$. Ainsi I contient bien un élément de A. Le point *(i)* est démontré.

On a démontré par double implication que les points *(i)* et *(ii)* sont équivalents. □

▷ **Exercice 14.**

2) Suites récurrentes

Définition. Une suite récurrente est une suite définie par la donnée de son premier terme et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout n, où f est une fonction.

Méthodes.

- Si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors l'existence de la suite doit être justifiée par la proposition suivante.

Définition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.
Une partie de I de D est stable par f si : $\forall x \in I \quad f(x) \in I$

Proposition. *Si I est stable par f et $u_0 \in I$ alors la suite (u_n) est bien définie et incluse dans I :*

Exemple 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{6}{1+u_n}$.

Méthodes (suite).

- L'étude de la fonction f permet de prévoir le comportement de la suite (u_n).
- Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est déterminé par ses deux premiers termes.

Démonstration.

Remarque. Si f est décroissante alors (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Méthode (suite).

- On peut appliquer les théorèmes d'existence de limite pour démontrer que la suite est convergente ou divergente.
- Si la suite (u_n) est convergente et f est continue alors la limite ℓ de (u_n) est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$
- La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ peut aussi donner des indications.
  En effet si h est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et si h est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  De plus si f est continue et (u_n) converge vers ℓ alors $h(\ell) = 0$.

Proposition. *Soit (u_n) une suite vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue. On suppose que la suite (u_n) est convergente.*
Alors sa limite ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$

Démonstration.

▷ **Exercice 15.**

D. Suites adjacentes

Définition. Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si
(i) L'une est croissante et l'autre est décroissante.
(ii) La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Théorème. *Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.*

Démonstration. Quitte à inverser les deux suites, on suppose que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. On démontre le théorème en trois étapes.

1. Montrons que $(u_n) \leqslant (v_n)$:

Comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} \leqslant v_n$$

Ceci implique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$$

donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante. Par hypothèse cette suite converge vers 0, donc 0 est sa borne inférieure, et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n - u_n \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad u_n \leqslant v_n$$

2. Montrons que (u_n) et (v_n) sont convergentes :

La suite (u_n) est croissante, donc minorée par u_0. La suite (v_n) est décroissante, donc majorée par v_0. Le point précédent donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc par théorème elle converge.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc par théorème elle converge.

3. Montrons que leurs limites sont égales :

Soit $\ell = \lim u_n$, $\ell' = \lim v_n$. Comme $\lim(v_n - u_n) = 0$ alors $\ell' - \ell = 0$, puis $\ell = \ell'$.

Ainsi (u_n) est (v_n) convergent vers la même limite. □

▷ **Exercice 16.**

V. Suites extraites

A. Généralités

Définition. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, et (u_n) une suite. La suite

$$(u_{\varphi(n)}) = (u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, u_{\varphi(2)}, \ldots)$$

est dite extraite de la suite (u_n).

Exemples. Les suites suivantes sont extraites de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{lcl} (u_{2n}) & = & (u_0, u_2, u_4, \ldots) \\ (u_{2n+1}) & = & (u_1, u_3, u_5, \ldots) \\ (u_{n^3}) & = & (u_0, u_1, u_8, u_{27}, \ldots) \end{array}$$

Théorème. *Si une suite (u_n) admet une limite alors toutes ses suites extraites admettent la même limite.*

Démonstration. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite d'une suite (u_n) admettant ℓ pour limite.

On suppose que ℓ est un réel, les cas où ℓ est infini sont similaires.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Si $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant N$ (car $\varphi(n) \geqslant n$, voir lemme ci-dessous). Ceci montre que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_{\varphi(n)})$ converge bien vers ℓ. □

Lemme. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Par récurrence, sachant que si p et q sont deux entiers alors :

$$p > q \qquad \Longrightarrow \qquad p \geqslant q + 1$$ □

▷ **Exercice 17.**

Remarque : décalage. Soit (u_n) une suite admettant une limite. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite

$$(u_{n+p}) = (u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots)$$

admet la même limite.

On peut aussi décaler dans l'autre sens :

$$(u_{n-p}) = (0, \ldots, 0, u_0, u_1, \ldots)$$

Dans ce cas également la suite admet la même limite, mais ce n'est pas conséquence du théorème précédent.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite (finie ou infinie) alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers cette limite.*

Démonstration. On traite le cas où les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent. Les cas où la limite est infinie sont similaires.

Supposons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une limite commune ℓ.

Démontrons que la suite (u_n) converge également vers ℓ.

Soit ε un réel strictement positif. Comme les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ alors il existe deux entiers N_0 et N_1 tels que :

$$\begin{array}{lllll} \forall n\in\mathbb{N} & n\geqslant N_0 & \Longrightarrow & |u_{2n}-\ell|\leqslant\varepsilon \\ \text{et} & n\geqslant N_1 & \Longrightarrow & |u_{2n+1}-\ell|\leqslant\varepsilon \end{array}$$

De façon équivalente :

$$\begin{array}{lllll} \forall k\in\mathbb{N} & 2k\geqslant 2N_0 & \Longrightarrow & |u_{2k}-\ell|\leqslant\varepsilon & (1) \\ \text{et} & 2k+1\geqslant 2N_1+1 & \Longrightarrow & |u_{2k+1}-\ell|\leqslant\varepsilon & (2) \end{array}$$

On pose $N=\operatorname{Max}\{2N_0,2N_1+1\}$.

Soit n un entier supérieur à N. Alors n est supérieur à $2N_0$ et à $2N_1+1$.

De plus n est pair ou impair.

Si n est pair alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k$. On a supposé que $n\geqslant 2N_0$, donc $2k\geqslant 2N_0$, puis (1) donne $|u_{2k}-\ell|\leqslant\varepsilon$ et donc $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.

Si n est impair alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$. On a supposé que $n\geqslant 2N_1+1$, donc $2k+1\geqslant 2N_1+1$, puis (2) donne $|u_{2k+1}-\ell|\leqslant\varepsilon$ et donc $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.

Finalement, que n soit impair ou pair on a obtenu $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$. On a donc démontré :

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists N\in\mathbb{N} \qquad n\geqslant N \quad\Longrightarrow\quad |u_n-\ell|\geqslant\varepsilon$$

Ceci prouve que la suite (u_n) converge vers ℓ. □

B. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, m et M un minorant et un majorant de (u_n), si bien que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad m\leqslant u_n\leqslant M$$

On démontre le théorème en trois étapes.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

On applique le procédé de dichotomie pour construire par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$ le segment $[a_n,b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

Initialisation. On pose $a_0 = m$, $b_0 = M$. Comme la suite (u_n) est incluse dans le segment $[m, M]$ alors le segment $[a_0, b_0]$ contient une infinité de termes u_n puisqu'il les contient tous.

De plus $b_0 - a_0 = M - m$, donc le segment $[a_0, b_0]$ est de longueur $M - m$.

Hérédité. Supposons définis deux réels a_n et b_n tels que le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

Soit $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Alors l'un des segments $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$ contient une infinité de termes u_k. De plus : $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

Si $[a_n, c_n]$ est dans ce cas alors on définit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Sinon on définit $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Alors le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes u_k.

Dans les deux cas : $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$

En effet :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

ou $$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Conclusion. On a construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

De plus on a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant a_{n+1} \qquad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Les deux premières inégalités montrent que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. La troisième égalité montre que la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme est $b_0 - a_0 = M - m$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n - a_n = \frac{M - m}{2^n}$$

La suite $(b_n - a_n)$ converge donc vers 0.

Finalement (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, leur différence converge vers 0 donc ces deux suites sont adjacentes.

Par théorème elles convergent vers une limite ℓ.

2. Construction d'une suite extraite.

On construit par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ encadrée par les suites (a_n) et (b_n).

Initialisation. On pose $\varphi(0) = 0$, si bien que $u_{\varphi(0)} = u_0$. Alors $u_{\varphi(0)} \in [m, M]$ car le segment $[m, M]$ contient toute la suite (u_n). Ainsi $a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$.

Hérédité. Supposons défini $u_{\varphi(n)}$ avec $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes u_k. Il contient donc un u_k pour k strictement supérieur à $\varphi(n)$, puisque $\varphi(n)$ est fini. On pose $\varphi(n + 1) = k$, si bien que $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$, et $a_{n+1} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \leqslant b_{n+1}$.

Conclusion. On a construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})$ comprise entre les suites (a_n) et (b_n). Cette suite est bien extraite de la suite (u_n) car la fonction φ est strictement croissante : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n + 1) > \varphi(n)$

3. La suite extraite est convergente.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$

De plus les suites (a_n) et (b_n) convergent vers le même réel ℓ.

Par théorème d'encadrement la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

On a démontré que la suite (u_n) admet une suite extraite convergente. □

Valeurs d'adhérence

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Un réel a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si :

Remarque. De façon équivalente, le réel a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$ l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ contient une infinité de termes de la suite.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et a un réel. Alors a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.*

Démonstration. Soit a une valeur d'adhérence de la suite (u_n). On construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Initialisation. On pose $\varphi(0) = 0$.

Hérédité. Supposons, pour un $k \in \mathbb{N}$, que $\varphi(k)$ est défini. Soit $N = \varphi(k) + 1$. Comme a est valeur d'adhérence alors il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - a| \leqslant \frac{1}{k+1}$. On pose $\varphi(k+1) = n$. Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et $\left|u_{\varphi(k+1)} - a\right| \leqslant \frac{1}{k+1}$.

Conclusion. On a construit une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ car la fonction φ est strictement croissante. D'après le théorème d'encadrement cette suite converge vers a.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi par exemple pour $n = \text{Max}\,\{N, M\}$ on a $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Ceci montre que a est valeur d'adhérence de la suite (u_n), et achève la démonstration. □

Remarques.

(i) En conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les limites des suites extraites convergentes de (u_n).

Exemple. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérences : 1 et -1.

VI. Suites complexes

Définition. Une suite complexe est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, donc une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque. La définition d'une suite convergente de nombres complexes est identique à celle des suites réelles, mais il faut lire «module de $(u_n - \ell)$» et non «valeur absolue de $(u_n - \ell)$» pour $|u_n - \ell|$.

La propriété d'unicité reste valide, toute suite convergente est bornée, les théorèmes d'opérations sur les limites finies sont valides, en particulier celui sur $|u_n|$.

Ne sont pas définis : majorant, minorant, minimum, maximum, suites croissantes, suites adjacentes, limites infinies, théorèmes de comparaison et d'encadrement.

On se ramène souvent au cas des suites réelles en étudiant la suite des modules $(|u_n|)$, qui est une suite réelle positive. On utilise aussi les deux suites réelles $(\mathrm{Re}\,(u_n))$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))$.

▷ **Exercice 18.**

Proposition. *Soit (u_n) une suite complexe.*
Si (u_n) converge vers ℓ alors la suite conjuguée $(\overline{u_n})$ converge vers $\overline{\ell}$.

Démonstration. C'est immédiat car $\left|\overline{u_n} - \overline{\ell}\right| = \left|\overline{u_n - \ell}\right| = |u_n - \ell|$. □

Théorème. *Soit ℓ un complexe, de forme algébrique $\ell = a + ib$.*
Une suite (u_n) converge vers $\ell = a + ib$ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers a et b.

Démonstration. C'est un corollaire de la propriété précédente :

Si (u_n) converge vers ℓ alors $(\overline{u_n})$ converge vers $\overline{\ell}$ donc par somme et multiplication par un scalaire $\left(\frac{u_n+\overline{u}_n}{2}\right)$ converge vers $\frac{\ell+\overline{\ell}}{2}$, donc $(\mathrm{Re}(u_n))$ converge vers a.

De même $(\mathrm{Im}(u_n))$ converge vers b.

Réciproquement, si $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers a et b alors $(\mathrm{Re}(u_n) + i\,\mathrm{Im}(u_n))$ converge vers $a + ib$, donc (u_n) converge vers ℓ. □

Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Toute suite complexe bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration. Soit (u_n) une suite complexe bornée.

On sait que pour tout complexe z : $|\mathrm{Re}\,z| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\,z| \leqslant |z|$.

Ceci montre que les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ sont bornées.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel il existe une suite extraite $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ convergente.

La suite $(\mathrm{Im}(u_{\varphi(n)}))$ est extraite de la suite $(\mathrm{Im}(u_n))$ donc elle est bornée, et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel il existe une suite extraite $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ convergente.

La suite $(\mathrm{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ est extraite de la suite $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ qui est convergente donc elle est convergente.

Les deux suites $(\mathrm{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ et $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ sont convergentes donc la suite extraite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})$ est convergente. □

VII. Relations de comparaison

A. Négligeabilité

Définition. Soit (u_n) et (v_n) deux suites, (v_n) ne s'annulant pas. On dit que u_n est négligeable devant v_n si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors :

$$u_n = o(v_n) \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$$

Exemple 9. Comparaison des suites (n) et (n^2), puis $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Propositions. *Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites.*

(i) Si (u_n) et (v_n) sont négligeables devant (w_n) alors $(u_n + v_n)$ est négligeable devant (w_n).

(ii) Si (u_n) est négligeable devant (v_n) et (v_n) est négligeable devant (w_n) alors (u_n) est négligeable devant (w_n).

(iii) Si (u_n) est négligeable devant (v_n), et si (v_n) tend vers une limite finie ℓ, alors (u_n) tend vers 0.

Démonstration. Laissées en exercice. □

B. Équivalence

Définition. Soit (u_n) et (v_n) deux suites, (v_n) ne s'annulant pas. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors :

$$u_n \sim v_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

Exemple 10. $(n^2 + 3n - 1)$ est équivalente à (n^2).

Remarque. Si (u_n) est équivalente à (v_n) alors (v_n) est équivalente à (u_n). On peut donc dire que (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

Propositions. *Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites.*

(i) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
L'équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites non-nulles à partir d'un certain rang.

(ii) Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) tend vers ℓ.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

(iv) Si (v_n) est négligeable devant (u_n), alors $(u_n + v_n)$ est équivalente à (u_n).

Exemple.

$n^2 + 5n \sim n^2$ car

Remarque. La dernière proposition équivaut à : $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

Démonstration.

Proposition. *Soit* (u_n), (v_n), (u'_n), (v'_n) *quatre suites.*

$$\textit{Si} \quad u_n \sim u'_n \quad \textit{et} \quad v_n \sim v'_n \qquad \textit{alors} \qquad u_n v_n \sim u'_n v'_n \quad \textit{et} \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Exemple. Comme $2n^2 - 3n + 1 \sim 2n^2$ et $n^2 + 5 \sim n^2$

alors $\dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 + 5}$

Remarque. La relation d'équivalence est compatible avec les produits et les quotients. Par contre elle ne l'est pas avec les sommes :

On ne peut pas ajouter d'équivalences

Exemple 11. $n^2 + n \sim n^2 + 1$ et $1 - n^2 \sim -n^2$

Proposition. *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

C. Domination

Définition. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors :

$$u_n = O(v_n) \qquad \text{ou} \quad u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n).$$

Exemple 12. La suite $((-2)^n)$ est dominée par la suite (2^n).

Proposition. *Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites.*

(i) Si (u_n) et (v_n) sont dominées par (w_n) alors $(u_n + v_n)$ est dominée par (w_n).

(ii) Si (u_n) est dominée par (v_n) et (v_n) est dominée par (w_n) alors (u_n) est dominée par (w_n).

Démonstration. Laissées en exercice. □

Remarque. Si (u_n) est négligeable devant (v_n) ou si (u_n) est équivalente à (v_n) alors (u_n) est dominée par (v_n).

Résumé.

D. Croissances comparées

Théorème. *Soit α, β et a trois réels.*

(i) Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$

(ii) $n^\alpha = o(a^n)$ (en supposant que $a > 1$)

(iii) $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$ (en supposant que $\alpha > 0$)

(iv) $a^n = o(n!)$

Exemple. Une suite polynomiale $u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_p n^p$ (où $a_p \neq 0$) est équivalente à son terme de plus haut degré :

$$u_n \sim a_p n^p$$

Démonstration.

Le point *(i)* est immédiat.

Les points *(ii)* et *(iii)* sont conséquences du théorème des croissances comparées pour les fonctions.

Le point *(iv)* est démontré page suivante. □

Démonstration du point *(iv)*.

▷ **Exercice 19.**

E. Équivalents usuels

Proposition. *Si (u_n) est une suite tendant vers 0 alors :*

Démonstration. Ceci est conséquence des limites usuelles de fonctions. □

Exemple 13.

(i) Calculer la limite de : $u_n = 2^n \tan \dfrac{\pi}{2^n}$

(ii) Donner une équivalent simple de : $v_n = \ln \sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de : $w_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$

Remarque. On ne peut pas appliquer une fonction à une équivalence : si $u_n \sim v_n$ alors il est faux en général que $f(u_n) \sim f(v_n)$.

▷ **Exercice 20.**