Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 8 janvier 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°7

Une suite à convergence très rapide

Soit u une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n}$$

1. Justifier que la suite u est bien définie et strictement positive.
2. Démontrer que la suite u est décroissante, puis qu'elle converge, et enfin que sa limite est 0.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = n\, u_n$.
   (a) Démontrer que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que la suite a est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle converge vers 0.
4. En s'inspirant de la question précédente, démontrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n!}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$.

5. (a) Démontrer l'inégalité : $\quad \forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leqslant x$
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant v_n - v_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$
   (c) En déduire la proposition :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad \text{si} \quad n \geqslant p \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant v_p - v_n \leqslant \frac{u_p}{2^p} \qquad (\star)$$

6. À l'aide de la proposition $(\star)$, démontrer que la suite v est minorée par $v_0 - u_0$.
   En déduire qu'elle converge vers un réel A puis démontrer que $A < 0$.

On pose ensuite $a = e^A$ de sorte que $a \in]0,1[$ et $A = \ln a$.

7. Toujours à l'aide de la proposition $(\star)$, démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad 2^p \ln a \leqslant \ln u_p \leqslant u_p + 2^p \ln a$$

   En déduire que $u_p \underset{p\to+\infty}{\sim} a^{2^p}$.