Lycée Bellevue – Toulouse **12 janvier 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°4

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème et indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1. Une suite triple-récurrente *(8 points)*

On définit une suite (u_n) par : $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.
2. Démontrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer sa matrice inverse.
3. Soit $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et β sont des réels à déterminer.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $Y_n = P^{-1}X_n$. Exprimer Y_{n+1} en fonction de T et de Y_n.
5. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad Y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = 1$, puis déterminer les termes généraux des suites (z_n), (y_n) puis (x_n).
6. Exprimer X_n en fonction de P et de Y_n. En déduire le terme général de (u_n).

Exercice 2. *(10 points)*

1. Soit x un réel strictement positif. Calculer :

$$\text{(a)}\quad F(x) = \int_{\sqrt{5}-2}^{x} \frac{t+2}{t(t+4)}\, dt. \qquad\qquad \text{(b)}\quad G(x) = \int_{4}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+4)}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$t(t+4)y' - (t+2)y = t\sqrt{t+4}. \tag{1}$$

3. Calculer $t(t+4)y' - (t+2)y$ si $y = \sqrt{t+4}$.
   En déduire une solution particulière de l'équation :

$$t(t+4)y' - (t+2)y = \sqrt{t+4}. \tag{2}$$

Problème. Intégrales de Wallis et formule de Stirling *(19 points)*

Pour tout entier positif n on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, \mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. (a) Déterminer les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En déduire que cette suite est convergente.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n. \tag{$\star$}$$

   (c) Démontrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
   (d) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
   En déduire que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.
   (b) Démontrer que : $\quad I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
4. (a) En utilisant $(\star)$ démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, exprimé sans factorielle ni I_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$.

5. Pour cette question on admet que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ strictement positif.
   (a) Simplifier $\dfrac{(u_n)^2}{u_{2n}}$ et en déduire la valeur de ℓ.
   (b) Démontrer la formule de Stirling : $\quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
6. Le but de cette question est de démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ strictement positif.
   Pour ceci on pose $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on définit les fonctions f et g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^3}{6(x+1)(x+2)}.$$

   (a) Calculer f' et en déduire sur f est positive sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Calculer g' et en déduire sur $f - g$ est négative sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad \ln\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

   (d) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et conclure cette question.
   Pour la limite de $(v_n - u_n)$ on remarquera que $u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$.