Corrigé du Devoir Surveillé n°4

Exercice 1. *(8 points)*

1. *(1 point)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AX_n$$

Ceci en posant

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. *(2 points)* On applique l'algorithme du pivot de Gauss. Par théorème la matrice P est inversible si et seulement si il existe une matrice Q qui vérifie $PQ = I_3$. Cette relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les opérations élémentaires $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ puis $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$ donnent :

$$PQ = I_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les opérations élémentaires $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$ puis $(L_2 \leftarrow -L_2)$ donnent :

$$PQ = I_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue l'opération $(L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3)$:

$$PQ = I_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on applique les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3)$, $(L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3)$, puis $(L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2)$:

$$\begin{aligned} PQ = I_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci montre que la matrice P est inversible, et que son inverse est :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. *(1 point)* Après calcul on obtient :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Cette matrice est bien de la forme voulue avec $\alpha = 1$ et $\beta = -2$.

4. *(1 point)* Par multiplication à gauche par P, la relation $Y_n = P^{-1}X_n$ équivaut à la relation $PY_n = X_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $X_{n+1} = AX_n$ alors $PY_{n+1} = APY_n$, puis par multiplication à gauche par P^{-1} on obtient $Y_{n+1} = P^{-1}APY_n$ donc :

$$\boxed{Y_{n+1} = TY_n.}$$

5. *(2 points)* Les coefficients de X_0 sont $u_2 = 7$, $u_1 = -1$, $u_0 = 0$, et ceux de Y_0 sont x_0, y_0, z_0.
La relation $Y_0 = P^{-1}X_0$ donne :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = Y_0 = P^{-1}X_0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = 1$.
La relation $Y_{n+1} = TY_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = x_n + y_n \qquad y_{n+1} = y_n \qquad z_{n+1} = -2z_n$$

Ainsi la suite (y_n) est constante et la suite (z_n) est géométrique de raison -2. Ceci donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = 2$, $z_n = (-2)^n$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+2} = x_n + 2$. La suite (x_n) est arithmétique et son terme général est $x_n = 2n - 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = 2n - 1 \qquad y_n = 2 \qquad z_n = (-2)^n}$$

6. *(1 point)* On a vu que $X_n = PY_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2n-1 \\ 2 \\ (-2)^n \end{pmatrix}$$

Il suffit de calculer la dernière ligne. Elle donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2n - 1 + (-2)^n}$$

Exercice 2. *(10 points)*

1. (a) *(2 points)* On remarque que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{t+2}{t(t+4)} = \frac{1}{2}\,\frac{2t+4}{t^2+4t}.$$

Il s'agit d'une forme $\frac{u'}{u}$, donc :

$$F(x) = \int_{\sqrt{5}-2}^{x} \frac{1}{2}\left(\frac{2t+4}{t^2+4t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}(\ln|t(t+4)|)\right]_{\sqrt{5}-2}^{x}.$$

Comme x et $\sqrt{5}-2$ sont strictement positifs alors :

$$F(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln x(x+4) - \ln\big(\sqrt{5}-2\big)\big(\sqrt{5}+2\big)\Big).$$

Finalement :

$$\boxed{F(x) = \ln\sqrt{x(x+4)}.}$$

(b) *(3 points)* Soit $u = \sqrt{t}$. Alors $t = u^2$.

- La fonction $u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (*i.e.*, dérivable et de dérivée continue). En la dérivant on obtient $\frac{dt}{du} = 2u$, ce qui donne $dt = 2u\,du$.
- Si $t = 4$ alors $u = 2$ et si $t = x$ alors $u = \sqrt{x}$.
- Par changement de variable :

$$G(x) = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2u\,du}{u(u^2+4)} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2\,du}{u^2+4}.$$

On calcule ensuite :

$$G(x) = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2}\,du = \left[\arctan\frac{u}{2}\right]_2^{\sqrt{x}}.$$

Finalement :

$$\boxed{G(x) = \arctan\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\pi}{4}.}$$

2. *(3 points)* On note (E) l'équation proposée et (H) l'équation homogène associée :

$$(H) \qquad t(t+4)y' - (t+2)y = 0$$

Comme $t(t+4)$ est non-nul sur $\mathbb{R}_+^*$ cette équation homogène équivaut à l'équation

$$y' - \frac{t+2}{t(t+4)}y = 0.$$

Posons $a(t) = \frac{t+2}{t(t+4)}$. Comme cette fonction est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ alors d'après le théorème fondamental la fonction F définie dans la première question ci-dessus en est une primitive. On la note plutôt A. Le résultat de la première question donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad A(t) = \ln\sqrt{t(t+4)}.$$

Ainsi A est une primitive de a, et comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors par théorème les solutions de l'équation (H) sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} y_0 : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array} \qquad \text{où} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ceci donne $y_0(t) = \lambda\sqrt{t(t+4)}$ où λ est une constante.
On recherche maintenant une solution particulière de l'équation (E). Pour ceci on utilise la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire que l'on pose $y(t) = \lambda(t)\sqrt{t(t+4)}$ où λ est une fonction dérivable.
On a alors $y'(t) = \lambda'(t)\sqrt{t(t+4)} + \lambda(t)\frac{t+2}{\sqrt{t(t+4)}}$, et y est solution de (E) si et seulement si :

$$\lambda'(t)\sqrt{t(t+4)}t(t+4) = t\sqrt{t+4}.$$

Cette condition équivaut à :

$$\lambda'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(t+4)}.$$

Cette fonction est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème fondamental la fonction G définie dans la première question de cet exercice en est une primitive. Comme une primitive est définie à une constante près, on peut poser :

$$\lambda(t) = \arctan\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

Ainsi la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad y_1(t) = \sqrt{t(t+4)}\arctan\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

est une solution particulière de l'équation (E).
Les solutions de (E) sont alors les fonctions $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$, soit :

$$\boxed{y(t) = \sqrt{t(t+4)}\left(\lambda + \arctan\frac{\sqrt{t}}{2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3. *(2 points)* Si $y = \sqrt{t+4}$ alors $y' = \frac{1}{2\sqrt{t+4}}$ donc :

$$t(t+4)y' - (t+2)y = -\frac{1}{2}(t+4)\sqrt{t+4}.$$

En multipliant par -2 on obtient que la fonction $y_2(t) = -2\sqrt{t+4}$ est solution de l'équation :

$$(E_2) \qquad t(t+4)y' - (t+2)y = (t+4)\sqrt{t+4}.$$

On sait que la fonction y_1 calculée dans la question précédente est solution de l'équation :

$$(E_1) \qquad t(t+4)y' - (t+2)y = t\sqrt{t+4}.$$

D'après le principe de superposition la fonction $y_3 = y_2 - y_1$ est solution de l'équation :

$$(E_3) \qquad t(t+4)y' - (t+2)y = 4\sqrt{t+4}.$$

Or on cherche une solution particulière de l'équation

$$(E_4) \qquad t(t+4)y' - (t+2)y = \sqrt{t+4}.$$

En divisant par 4 on obtient que la fonction $y_4 = \frac{y_3}{4}$ est une telle solution.

$$\boxed{y_4(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{t+4} - \frac{1}{4}\sqrt{t(t+4)}\arctan\frac{\sqrt{t}}{2} = -\frac{\sqrt{t+4}}{4}\left(2 + \sqrt{t}\arctan\frac{\sqrt{t}}{2}\right).}$$

Problème. Intégrales de Wallis et formule de Stirling *(19 points)*

1. *(1 point)* On calcule :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2. (a) *(2 points)* On démontre que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
Soit n un entier naturel fixé.
Si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$, donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

Ceci est valable pour tout n donc on a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante, donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

(b) *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On commence par expliciter I_{n+2} :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t.$$

On pose $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \sin^{n+1} t$. Alors $u(t) = -\cos t$ et $v'(t) = (n+1)\cos t \sin^n t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le théorème d'intégration par parties donne :

$$I_{n+2} = \Big[-\cos t \sin^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2 t \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^n t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t\right) && \text{par linéarité} \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$\boxed{(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.}$$

C'est le résultat attendu.

(c) *(1 point)* En multipliant le résultat de la question précédente par I_{n+1} on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_nI_{n+1}.$$

Ceci montre que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : deux de ses termes consécutifs sont égaux.
Pour $n = 0$ on obtient $(n+1)I_nI_{n+1} = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 1.
On en déduit donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}.}$$

(d) *(1 point)* La formule précédente peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{1}$$

On sait depuis la question 1 que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons ℓ sa limite.
Par décalage la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.
Par produit la suite $(I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ^2.
Or la suite $\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Par unicité de la limite, l'égalité (1) montre que $\ell^2 = 0$, et donc $\ell = 0$.
En conclusion la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. (a) *(1 point)* On sait que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Comme la suite $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ alors aucun I_n ne peut être nul.
Mais on sait que les termes I_n sont positifs, ils sont donc strictement positifs.
Par division par I_n on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

D'après la question c, comme $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

Or $\lim \frac{n+1}{n+2} = 1$, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Ceci montre que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

(b) *(1 point)* La formule (1) nous a donné :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

On en déduit :

$$I_n^2 \sim I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Comme la suite (I_n) est positive alors $\sqrt{I_n^2} = I_n$, donc :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

On a prouvé que la suite (I_n) converge vers 0, mais on en a aussi donné un équivalent.

4. (a) *(1 point)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la proposition : $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation.</u> Pour $n = 0$ on a $I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{4^0 (0!)^2} \frac{\pi}{2}$, donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

D'après l'égalité de la question (2b) :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$I_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2(n+1)} \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

On obtient :

$$I_{2(n+1)} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

L'hérédité est démontrée.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) *(1 point)* Comme $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ alors la relation précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{2n}{n} = \frac{2 \times 4^n}{\pi} I_{2n}$$

D'après la question (3) : $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

On en déduit l'équivalent :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.}$$

5. (a) *(2 points)* On calcule, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(u_n)^2}{u_{2n}} = \frac{n^{2n} \times n}{e^{2n}(n!)^2} \times \frac{e^{2n}(2n)!}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

D'après la question précédente :

$$\frac{(u_n)^2}{u_{2n}} \sim \frac{1}{4^n}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

La suite $\left(\frac{(u_n)^2}{u_{2n}}\right)$ converge donc vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
D'autre part la suite (u_n) converge vers ℓ, et comme la suite (u_{2n}) en est extraite alors elle converge aussi vers ℓ. Comme $\ell \neq 0$ la suite $\left(\frac{(u_n)^2}{u_{2n}}\right)$ converge vers $\frac{\ell^2}{\ell} = \ell$.
Ceci donne :

$$\boxed{\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$$

(b) *(1 point)* Comme la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ alors la suite $\left(\sqrt{2\pi}u_n\right)$ converge vers 1, *i.e.,* :

$$\sqrt{2\pi}\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On en déduit l'équivalence suivante :

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

6. (a) *(1 point)* Par composition, quotient et somme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$$

Cette dérivée est positive, donc f est croissante.
Or $f(0) = 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

(b) *(1 point)* Par quotient la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g'(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{3x^2(x+1)(x+2) - x^3(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2}\right) = \frac{x^2(x^2+6x+6)}{6(x+1)^2(x+2)^2}$$

Ensuite :

$$f'(x) - g'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} - \frac{x^2(x^2+6x+6)}{6(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{-x^4}{6(x+1)^2(x+2)^2}.$$

Cette dérivée est négative, donc $f - g$ est décroissante.
Or $f(0) - g(0) = 0$ donc $f - g$ est négative sur $\mathbb{R}_+$.

(c) *(1 point)* Soit $n \geqslant 1$. On calcule :

$$\begin{aligned}\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}\times\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}}\right) = \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{e}\right]\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{2}{2n+1}\right]\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right] = \left(n+\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\ln\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \ln\frac{u_{n+1}e^{\frac{1}{12(n+1)}}}{u_n e^{\frac{1}{12n}}} = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n}+\frac{1}{12(n+1)}-\frac{1}{12n}\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12n(n+1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6n(n+1)(2n+1)}\right)\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{6\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-g\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

Il s'agit bien des résultats demandés.

(d) *(2 points)* Comme f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $(f-g)$ est négative sur $\mathbb{R}_+$ alors :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \ln\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 0$$

On en déduit $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.
Or les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives car $n \geqslant 1$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
On calcule ensuite, toujours pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n - u_n = u_n\left(e^{\frac{1}{12n}}-1\right)$$

La suite (u_n) est positive et $\frac{1}{12n} \geqslant 0$, donc $v_n - u_n \geqslant 0$.
Ceci montre que $u_n \leqslant v_n$, et comme la suite (v_n) est décroissante alors $u_n \leqslant v_1$.
Ainsi :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant v_1\left(e^{\frac{1}{12n}}-1\right)$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{12n}\right)$ converge vers 0 alors la suite $\left(v_1\left(e^{\frac{1}{12n}}-1\right)\right)$ converge vers 0.
Par théorème d'encadrement la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, et la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Par théorème elles convergent vers la même limite.
En particulier la suite (u_n) converge vers une limite finie.
Comme elle est croissante alors elle est minorée par $u_1 = \frac{1}{e}$. Sa limite est donc supérieure ou égale à $\frac{1}{e}$, et ainsi elle est strictement positive.