Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 15
du 20 au 24 janvier 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a. Démonstration avec les quantificateurs.
2. Énoncé du théorème d'existence des limites d'une fonction f décroissante sur $I =]a, b[$.
3. Si $\lim u_n = a \in \overline{I}$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim f(u_n) = \ell$.
4. La fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
5. $x^\alpha = o(a^x)$ en $+\infty$ ($(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$, $a > 1$)
6. La fonction sinus est continue, en admettant que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leqslant |x|$

Exercices

Chapitre A7. Suites numériques

I. Généralités
II. Suites classiques
III. Limites
IV. Théorèmes d'existence de limite
V. Suites extraites
VI. Suites complexes
VII. Relations de comparaison

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres A7 (Suites) et B6 (Structures algébriques).

Chapitre A7. Suites

I. Généralités

Définition explicite, implicite ou par récurrence. Somme, produit, combinaison linéaire de suites. Suites constantes, croissantes, etc. Suites majorées, minorées, bornées. suites périodiques, stationnaires.

II. Suites classiques

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique, double-récurrentes.

III. Limites

Bornes, propriété de la borne supérieure et inférieure, maximum et minimum d'une partie.

Suites convergentes : définition. Unicité de la limite. Suites divergentes. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites. Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre. Limites infinies.

IV. Théorèmes d'existence de limite

Théorèmes d'encadrement. Théorème de limite des suites monotones. Suites adjacentes, définition et théorème.

V. Suites extraites

Définition. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) admet une limite alors toute suite extraite de (u_n) admet la même limite. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. Valeurs d'adhérence : définition, propriété : un réel a est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) si et seulement si il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

VI. Suites complexes

Si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$, et $(\bar{u}_n)$ converge vers $\bar{\ell}$. La suite (u_n) converge vers $\ell = a + ib$ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent vers a et b respectivement.

Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes.

VII. Relations de comparaison

Définitions et propriétés : $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$, $u_n = O(v_n)$. Réécriture des croissances comparées, en ajoutant $e^{\gamma n} = o(n!)$. Equivalents usuels : si (u_n) converge vers 0 alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ et $\sin(u_n) \sim u_n$.