Corrigé du Devoir à la Maison n°8

Partie A. Sous-groupes de $\mathbb{R}$

1. On vérifie que f est compatible avec les lois de $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire avec les additions :

   $$\forall (m,n)\in\mathbb{Z}^2 \qquad f(m+n)=a(m+n)=am+an=f(m)+f(n)$$

   Ceci montre que f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$.
   Par définition l'image de f est : $\operatorname{im} f=\{\,f(n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$
   En conséquence :

   $$\operatorname{im} f=\{\,an\mid n\in\mathbb{Z}\}=a\mathbb{Z}$$

   Par propriété l'image de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, donc $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

2. Comme H n'est pas réduit à 0 alors H contient un réel non-nul.
   Comme H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ alors il est stable par passage à l'opposé, donc il contient un réel non-nul et son opposé, donc il contient au moins un réel strictement positif.
   Ceci montre que $H\cap\mathbb{R}_+^*$, que l'on note H_+, est non-vide.
   De plus H_+ est minorée par 0. Il s'agit donc d'une partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$.
   Par la propriété de la borne inférieure H_+ admet un plus grand minorant, c'est-à-dire une borne inférieure.

3. (a) Comme a est la borne inférieure de H_+ alors a est le plus grand minorant de H_+, donc tout réel b strictement supérieur à a n'est pas un minorant de H_+.
   Comme $a>0$ alors $2a>a$, donc $2a$ n'est pas un minorant de H_+, et il existe $h\in H_+$ tel que $h<2a$.
   Comme $h\in H_+$ et $a=\operatorname{Inf} H_+$ alors $a\leqslant h$, mais comme on a supposé que $a\notin H$ alors $a<h$.
   Il existe donc bien $h\in H$ tel que $a<h<2a$.
   De même, comme $h>a$ alors h n'est pas un minorant de H_+ donc il existe $h'\in H$ tel que $a<h'<h$.
   On sait que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ donc il est stable par addition et soustraction. Comme h et h' appartiennent à H alors $h-h'\in H$.
   Comme $h'<h$ alors $0<h-h'$ et donc $h-h'\in H_+$.
   Par somme, comme $h<2a$ et $-h'<-a$ alors $h-h'<a$.
   Ceci est absurde car $h-h'\in H_+$ et $a=\operatorname{Inf} H_+$.
   Cette contradiction montre que $a\in H$.

(b) D'après la question précédente : $a \in H$.
Soit $b \in H$ et $n = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$. Le quotient $\frac{b}{a}$ est bien défini car a est supposé strictement positif.
Par définition de la partie entière : $\frac{b}{a} - 1 < n \leqslant \frac{b}{a}$
Ceci donne : $0 \leqslant b - na < a$
Comme H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ alors il est stable par itération. Or $a \in H$ et n est entier, donc $na \in H$. De plus $b \in H$ donc $b - na \in H$.
Mais $b - na < a = \text{Inf } H_+$, donc $b - na \notin H_+$, puis $b - na \leqslant 0$. Or $b - na \geqslant 0$, donc $b - na = 0$, puis $b = na$, et ainsi $b \in a\mathbb{Z}$.

(c) D'après la question précédente tout élément b de H appartient à $a\mathbb{Z}$, donc $H \subseteq a\mathbb{Z}$.
Réciproquement, comme H est stable par itération et contient a alors $a\mathbb{Z} \subseteq H$.
On en déduit que $H = a\mathbb{Z}$.

4. (a) Soit α, β des réels tels que $\alpha < \beta$. Alors $\beta - \alpha > 0$, et comme 0 est la borne inférieure de H_+ alors $\beta - \alpha$ n'est pas un minorant de H_+.
Il existe donc $h \in H_+$ tel que $h < \beta - \alpha$.
On a alors $0 < h < \beta - \alpha$. Comme h est non nul alors $n = \left\lfloor \frac{\beta}{h} \right\rfloor$ est défini, et entier.
L'encadrement $\frac{\beta}{h} - 1 < n \leqslant \frac{\beta}{h}$ donne : $\beta - h < nh \leqslant \beta$
Comme $h < \beta - \alpha$ alors $\alpha < \beta - h$ et donc $\alpha < nh \leqslant \beta$.
De plus $h \in H$ et H est stable par itération, donc $nh \in H$.
Ainsi $nh \in H \cap [\alpha, \beta]$.

(b) On vient de démontrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient un élément de H, donc H est dense dans $\mathbb{R}$.

En conclusion de cette partie, tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$, éventuellement nul, soit dense dans $\mathbb{R}$.

On peut citer par exemple $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$, les deux derniers étant des sous-groupes denses de $(\mathbb{R}, +)$.

Partie B. Une application

1. On démontre que $H+K$ est un sous-groupe de $(G,+)$ en quatre points.
   (i) $H+K \subseteq G$. En effet, $H+K$ contient les éléments $h+k$ où $h \in H$ et $k \in K$. Si $h \in H$ et $k \in K$ alors h et k appartiennent à G, lequel est stable par addition car c'est un groupe, donc $h+k \in G$.
   (ii) $H+K$ n'est pas vide. En effet, H et K sont des sous-groupes de G, donc ils ne sont pas vides. Il existe $h \in H$ et $k \in K$, donc il existe $h+k \in H+K$.
   (iii) $H+K$ est stable par addition. Soit $x = h+k$ et $x' = h'+k'$ deux éléments de $H+K$, avec $(h,h') \in H^2$ et $(k,k') \in K^2$. Comme H et K sont des sous-groupes de $(G,+)$ alors $h+h' \in H$ et $k+k' \in K$, donc par associativité et commutativité de l'addition :
   $$x + x' = (h+k) + (h'+k') = (h+h') + (k+k') \in H+K$$
   (iv) $H+K$ est stable par passage à l'opposé. En effet, si $x = h+k \in H+K$ alors $-x = -h-k \in H+K$ car $-h \in H$ et $-k \in K$, puisque H et K sont stables par passage à l'opposé.

   Tout ceci justifie que $H+K$ est un sous-groupe de $(G,+)$.
2. D'après la partie précédente $\mathbb{Z}$ et $2\pi\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$, car ils sont de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{Z}$.
   Or $H = \{n + 2\pi m \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, donc d'après la question précédente H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
3. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.
   Le couple $(n,m) = (1,0)$ montre que $1 \in H$. Il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = qa$.
   Le couple $(n,m) = (0,1)$ montre que $2\pi \in H$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi = pa$.
   Par quotient on obtient $\frac{2\pi}{1} = \frac{pa}{qa}$ donc $\pi = \frac{p}{2q}$ avec p et $2q$ entiers.
   Ceci est impossible car π est irrationnel.
   Cette contradiction montre qu'il n'existe pas de réel a tel que $H = a\mathbb{Z}$.
   D'après la partie précédente, comme H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ qui n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$ alors H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soit a et b deux réels tels que $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$.
   La fonction arccos est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1,1]$, donc :
   $$0 \leqslant \arccos b < \arccos a \leqslant \pi$$
   Ainsi l'intervalle $[\arccos b, \arccos a]$ n'est pas réduit à un point, et comme H est dense dans $\mathbb{R}$ alors H rencontre cet intervalle.
   Il existe h appartenant à $H \cap [\arccos b, \arccos a]$, donc il existe $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n + 2\pi m \in [\arccos b, \arccos a]$, *i.e.,* :
   $$\arccos b \leqslant n + 2\pi m \leqslant \arccos a$$
5. On applique la fonction cosinus, strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$, à l'encadrement ci-dessus. Comme $\cos(n + 2\pi m) = \cos(n)$ alors :
   $$a \leqslant \cos(n) \leqslant b$$
   Ainsi on a démontré que pour tout intervalle $[a,b]$ non réduit à un point inclus dans l'intervalle $[-1,1]$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\cos(n) \in [a,b]$.
   Ceci montre que l'ensemble $\{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans l'intervalle $[-1,1]$.