Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2023-2024**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 16
du 29 janvier au 2 février 2024

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Un scalaire α est racine d'un polynôme P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

2. Un scalaire α est racine d'un polynôme P de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement s'il est racine de P, $P', \ldots, P^{(k-1)}$ mais pas de $P^{(k)}$. Démonstration du sens indirect.

3. Relations coefficients-racines d'un polynôme de degré 3 avec démonstration, puis d'un polynôme de degré n sans démonstration.

4. Soit P un polynôme réel et α un complexe. Alors α est racine de P si et seulement si $\bar{\alpha}$ est racine de P. De plus α et $\bar{\alpha}$ ont même ordre de multiplicité.

Exercices

Chapitre A8. Limites et continuité

I. Limites
II. Propriétés
III. Relations de comparaison
IV. Continuité
V. Fonctions complexes

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B7 : Polynômes.

Chapitre A8. Limites, continuité

I. Limites

Limites finies et infinies d'une fonction en une borne finie ou infinie de son ensemble de définition. Unicité. Continuité en un point, prolongement par continuité. Voisinage d'un point ou d'un infini. Limites et continuité à gauche et à droite. Opérations sur les limites (somme, produit, composition).

II. Propriétés

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a. Si f admet une limite strictement positive en a alors f est strictement positive au voisinage de a. Théorèmes de comparaison, d'encadrement. Théorème de limites des fonctions monotones. Caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité.

III. Relations de comparaison

Négligeabilité, équivalences et domination. Toutes les propriétés pour les relations de comparaison sur les suites restent vraies. Croissances comparées, équivalences usuelles.

IV. Continuité

Continuité sur un intervalle, opérations. Théorème de valeurs intermédiaires, dichotomie, image d'un segment par une fonction continue, théorème de la bijection, toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.

V. Fonctions complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction, avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Définitions : $|f|$, $\overline{f}$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$. Propriétés : f est bornée si et seulement si $|f|$ l'est, f tend vers a si et seulement si $\overline{f}$ tend vers $\overline{a}$, f est continue si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.