Lycée Bellevue – Toulouse **1er mars 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°5

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème et indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème 1. La méthode de Newton *(17 points)*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ convexe telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

1. (a) Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
   (b) Démontrer que s'il existe un réel $d \in [a, b]$ tel que $f'(d) \leqslant 0$ alors f est strictement négative sur le segment $[a, d]$.
   (c) En déduire que : $\forall t \in [c, b] \quad f'(t) > 0$.
   (d) Démontrer qu'il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

On définit la fonction $h : \begin{array}{rcl} [c, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \dfrac{f(t)}{f'(t)} \end{array}$.

2. (a) Justifier que cette fonction est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$, et croissante.
   (b) Justifier que pour tout $t \in [c, b]$, $h(t)$ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente à la courbe de f en t et l'axe des abscisses.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = h(u_n)$

3. (a) Démontrer que cette suite est bien définie et incluse dans l'intervalle $[c, b]$.
   (b) Déterminer ses variations.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. (a) Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \in [c, b] \qquad \frac{f''(t)}{f'(t)} \leqslant M.$$

(b) Démontrer qu'alors pour tout $t \in [c, b]$:

$$h'(t) \leqslant M(t - c).$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - c \leqslant M(u_n - c)^2.$$

(d) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\quad M(u_p - c) < 1$

(e) On pose $q = M(u_p - c)$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{p+n} - c \leqslant \frac{q^{2^n}}{M}.$$

Comme $q \in [0, 1[$ alors on dit que la convergence de la suite (u_n) est *quadratique*.

Problème 2. Dérivation discrète des polynômes *(22 points)*

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ on définit :

$$\Delta(P) = P(X) - P(X - 1).$$

Il est évident que $\Delta(P)$ est un polynôme, donc Δ est une application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Partie A. Généralités *(7 points)*

1. (a) Expliciter $\Delta(X^n)$ pour $n = 0, 1, 2, 3$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de $\Delta(X^n)$.

2. Démontrer que pour tous polynômes P et Q, et tout complexe λ :

$$\Delta(P + Q) = \Delta(P) + \Delta(Q) \qquad \Delta(\lambda P) = \lambda \Delta(P) \qquad \Delta(P') = \Delta(P)'.$$

3. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 0$ et de coefficient dominant a.
Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(P)$.

4. (a) Résoudre l'équation $\Delta(P) = 0$.

(b) En déduire que pour tous polynômes P et Q :

$$\Delta(P) = \Delta(Q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{C} \quad P = Q + k.$$

Partie B. Surjectivité de Δ *(4 points)*

Dans cette partie on démontre que l'application $\Delta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ est surjective.

On rappelle que pour tout entier n on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degrés inférieurs ou égaux à n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété $\mathcal{P}_n$: pour tout $B \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ il existe $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(A) = B$.

1. Soit Q un polynôme non-nul de degré n, soit a son coefficient dominant.
   (a) Déterminer un scalaire λ tel que : $Q - \Delta(\lambda X^{n+1}) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
   (b) On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   Démontrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
2. Démontrer par récurrence que l'application Δ est surjective.

Partie C. Nombres de Bernoulli *(11 points)*

1. Soit n un entier naturel. Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme P tel que :

$$\Delta(P) = (X-1)^n \qquad \text{et} \qquad P(1) = 0.$$

On note S_n ce polynôme.

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de S_n.
3. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad S_n(k) = \sum_{j=0}^{k-1} j^n$.
4. Réciproquement, démontrer que si un polynôme P vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(k) = \sum_{j=0}^{k-1} j^n$ alors $P = S_n$.
   On pourra spécialiser $\Delta(P)$.
5. Rappeler les formules pour $\sum_{j=0}^{k-1} 1$, $\sum_{j=0}^{k-1} j$, $\sum_{j=0}^{k-1} j^2$ et $\sum_{j=0}^{k-1} j^3$.
   En déduire à l'aide de la question précédente les polynômes S_0, S_1, S_2, S_3.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n(0) = S_n(1) = 0$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\Delta(S_n' - nS_{n-1})$.
   En déduire qu'il existe $b_n \in \mathbb{C}$ tel que $S_n' = nS_{n-1} + b_n$.

Les b_n sont appelés *nombres de Bernoulli*. On ajoute $b_0 = 1$.

8. Calculer S_4.
9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \frac{X^{n+1-k}}{n+1-k}$.