Corrigé du Devoir Surveillé n°5

Exercice 1. La méthode de Newton *(17 points)*

1. (a) *(1 point)* La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc elle est continue. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes distincts alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

   (b) *(1 point)* Supposons qu'il existe un réel $d \in [a, b]$ tel que $f'(d) \leqslant 0$.

   Comme f est convexe et dérivable, alors f' est croissante.

   Elle atteint donc son maximum sur le segment $[a, d]$ au point d. Comme $f'(d) \leqslant 0$ alors elle est négative sur le segment $[a, d]$.

   Ceci implique que f est décroissante sur le segment $[a, d]$, donc elle atteint son maximum sur ce segment en a, et comme $f(a) < 0$ alors f est strictement négative sur $[a, d]$.

   (c) *(1 point)* On raisonne par l'absurde.

   Supposons qu'il existe $d \in [c, b]$ tel que $f'(d) \leqslant 0$.

   Alors $d \in [a, b]$, donc d'après la question précédente f est strictement négative sur l'intervalle $[a, d]$. Or $d \in [c, b]$ donc $c \leqslant d$, et ainsi $c \in [a, d]$. D'après la question précédente $f(c) < 0$, ce qui est faux car $f(c) = 0$.

   Cette contradiction montre qu'il n'existe pas de réel $d \in [c, b]$ tel que $f'(d) \leqslant 0$.

   Et donc : $\quad \forall t \in [c, b] \quad f'(t) > 0$

   (d) *(1 point)* Nous avons déjà démontré qu'il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

   Supposons qu'il existe un autre réel $d \in [a, b]$ tel que $f(d) = 0$.

   Quitte à les inverser on suppose que $c < d$.

   Dans la question précédente nous avons démontré que f' est strictement positive sur $[c, b]$. Donc f est strictement croissante sur cet intervalle. Mais comme $c < d \leqslant b$ alors $f(c) < f(d)$, donc on ne peut avoir $f(c) = f(d) = 0$.

   Cette contradiction montre qu'il n'existe pas d'autre réel que c dans l'intervalle $[a, b]$ annulant f, et donc il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

2. (a) *(2 points)* Nous avons démontré dans la question précédente que la fonction f' est strictement positive sur l'intervalle $[c, b]$. Elle ne s'annule donc pas, et ainsi h est bien définie.

   Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors f' est de classe $\mathcal{C}^1$. Par quotient la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{f'(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $t \mapsto t$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ par soustraction.

   Sa dérivée est :

$$\forall t \in [c, b] \qquad h'(t) = 1 - \frac{f'(t)^2 - f(t)f''(t)}{f'(t)^2} = \frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}.$$

La fonction f est strictement croissante sur le segment $[c, b]$ car f' y est strictement positive, d'après la question 1(c).
Pour tout $t \in [c, b]$, comme $c \geqslant t$ alors $f(c) \geqslant f(t)$ et donc $f(t) \geqslant 0$.
Comme f est convexe deux fois dérivable alors f'' est positive. On en déduit :

$$\forall t \in]c, b] \qquad h'(t) = \frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2} \geqslant 0.$$

La fonction h' est positive sur $[c, b]$ donc h est croissante sur $[c, b]$.

(b) *(1 point)* La tangente à la courbe de f au point t admet pour équation :

$$y = f'(t)(x - t) + f(t).$$

L'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses se situe au point $(x, 0)$ avec x vérifiant $0 = f'(t)(x - t) + f(t)$, soit $x = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$ car $f'(t) \neq 0$. On obtient bien $x = h(t)$, donc $h(t)$ est l'abscisse de l'intersection entre la tangente à la courbe de f en t et l'axe des abscisses.

3. (a) *(1 point)* Démontrons que le segment $[c, b]$ est stable par h : $\quad h([c, b]) \subseteq [c, b]$.
Comme h est croissante sur ce segment alors :

$$\forall t \in [c, b] \qquad c \leqslant t \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad h(c) \leqslant h(t) \leqslant h(b).$$

Comme $f(c) = 0$ alors $h(c) = c$.
On sait que $f(b) > 0$ et que $f'(b) \geqslant 0$ d'après 1(c), donc $h(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$.
Ceci montre que pour tout $t \in [c, b]$: $\quad c \leqslant h(t) \leqslant b$.
Le segment $[c, b]$ est stable par h et u_0 appartient à ce segment, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et incluse dans ce segment.

(b) *(1 point)* On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

On sait que f est positive et f' est strictement positive sur le segment $[c, b]$, et u_n appartient à ce segment, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) *(2 points)* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par c, donc par théorème elle est convergente.
Soit ℓ sa limite. Par décalage la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers c.
Comme h est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} h(u_n) = h(\ell)$. L'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = h(u_n).$$

donne par unicité de la limite $\ell = h(\ell)$. Cette dernière équation équivaut à :

$$0 = \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}.$$

ce qui montre que $f(\ell) = 0$. Or c est l'unique réel de $[c, b]$ (et même de $[a, b]$) où f s'annule, d'après la question 1(d). Ainsi $\ell = c$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

4. (a) *(1 point)* Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors f' et f'' sont continues. Par quotient la fonction $t \mapsto \frac{f''(t)}{f'(t)}$ est continue sur le segment $[c, b]$.
Par théorème, une fonction continue sur un segment est bornée, donc majorée, et ainsi il existe un réel M tels que :

$$\forall t \in [c, b] \qquad \frac{f''(t)}{f'(t)} \leqslant M. \tag{1}$$

Quitte à le remplacer par 1 on peut supposer que M est strictement positif.

(b) *(1 point)* On rappelle que :

$$\forall t \in [c, b] \qquad h'(t) = \frac{f(t)f''(t)}{f'^2(t)}.$$

On sait que h est croissante sur l'intervalle $[c, b]$. Pour tout $t \in [c, b]$, comme $c \leqslant t$ alors $h(c) \leqslant h(t)$, ce qui donne $c \leqslant t - \frac{f(t)}{f'(t)}$ et ainsi :

$$\forall t \in [c, b] \qquad \frac{f(t)}{f'(t)} \leqslant t - c. \tag{2}$$

On sait aussi que f et f' sont positifs sur $[c, b]$ donc $0 \leqslant \frac{f(t)}{f'(t)}$.
Par produit de facteurs positifs les inégalités (1) et (2) donnent :

$$\forall t \in [c, b] \qquad h'(t) \leqslant M(t - c).$$

(c) *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction h sur l'intervalle $[c, u_n]$.
On sait que h' est positive sur $[c, b]$ et que :

$$\forall t \in [c, b] \qquad h'(t) \leqslant M(t - c).$$

Si $t \in [c, u_n]$ alors $t \leqslant u_n$, donc $M(t - c) \leqslant M(u_n - c)$. Ceci montre que :

$$\forall t \in [c, u_n] \qquad 0 \leqslant h'(t) \leqslant M(u_n - c).$$

Finalement on a les hypothèses :
- h est continue sur $[c, u_n]$
- h est dérivable sur $]c, u_n[$
- Pour tout $t \in [c, u_n]$: $\quad 0 \leqslant h'(t) \leqslant M(u_n - c)$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$0 \leqslant h(u_n) - h(c) \leqslant M(u_n - c)^2.$$

Comme $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(c) = c$ alors on obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - c \leqslant M(u_n - c)^2.$$

(d) *(1 point)* On a démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c, donc par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists p \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant p \quad \Longrightarrow \quad |u_n - c| \leqslant \varepsilon.$$

Comme M est strictement positif alors $\varepsilon = \frac{1}{2M}$ est bien défini et strictement positif. Il existe donc un entier p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant p \quad \Longrightarrow \quad |u_n - c| \leqslant \frac{1}{2M}.$$

On sait que tous les u_n sont dans l'intervalle $[c, b]$ donc $u_n - c > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant p \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant M(u_n - c) \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

En particulier pour $n = p$: $\quad M(u_p - c) < 1$.

(e) *(1 point)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$0 \leqslant u_{p+n} - c \leqslant \frac{q^{2^n}}{M}.$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. La propriété $\mathcal{P}_0$ s'écrit : $0 \leqslant u_p - c \leqslant \frac{q}{M}$. Or $q = M(u_p - c)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain n, *i.e.*, que $0 \leqslant u_{p+n} - c \leqslant \frac{q^{2^n}}{M}$ pour un n donné.
D'après la question (c) ci-dessus :

$$u_{p+n+1} - c \leqslant M(u_{p+n} - c)^2.$$

Ceci donne :

$$u_{p+n+1} - c \leqslant M\frac{(q^{2^n})^2}{M^2} = \frac{q^{2^{n+1}}}{M}.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie, et l'hérédité est établie.
Conclusion. Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. On peut donc construire une suite qui converge très vite vers le zéro de la fonction f.

Par exemple pour $f(x) = x^m - x_0$ sur l'intervalle $[0, x_0]$, avec m entier supérieur ou égal à 2 et x_0 réel supérieur ou égal à 1, on vérifie que les hypothèses sont satisfaites, et la suite (u_n) converge très vite vers $\sqrt[m]{x_0}$.

Il s'agit de la Méthode de Héron, très efficace pour calculer une racine n-ème.

Exercice 2. Dérivation discrète des polynômes *(22 points)*

Partie A. Généralités *(7 points)*

1. (a) *(1 point)* Par définition de Δ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \Delta(X^n) = X^n - (X-1)^n$$

On obtient :

$$\Delta(1) = 0 \qquad \Delta(X) = 1 \qquad \Delta(X^2) = 2X - 1 \qquad \Delta(X^3) = 3X^2 - 3X + 1.$$

(b) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\Delta(X^n) = X^n - (X-1)^n &= X^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} \\ &= X^n - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} - \binom{n}{n-1}(-X^{n-1}) - \binom{n}{n} X^n \\ &= nX^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k}.\end{aligned}$$

Il existe donc un polynôme R_n tel que :

$$\Delta(X^n) = nX^{n-1} + R_n(X) \qquad \text{avec} \qquad \deg R_n \leqslant n-2.$$

Si $n \neq 0$ alors $\Delta(X^n)$ est de degré $n-1$ est de coefficient dominant n.
Si $n = 0$, comme $\Delta(1) = 0$ alors $\Delta(X^0)$ est de degré $-\infty$, il n'admet pas de coefficient dominant.

2. *(1 point)* Soit P et Q deux polynômes, λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned}\Delta(P+Q) &= (P+Q)(X) - (P+Q)(X-1) \\ &= P(X) - P(X-1) + Q(X) - Q(X-1) = \Delta(P) + \Delta(Q) \\ \Delta(\lambda P) &= (\lambda P)(X) - (\lambda P)(X-1) = \lambda P(X) - \lambda P(X-1) = \lambda \Delta(P) \\ \Delta(P)' &= (P(X) - P(X-1))' = P'(X) - P'(X-1) = \Delta(P').\end{aligned}$$

Il s'agit bien des égalités demandées.

3. *(1 point)* Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Le coefficient dominant de P est alors $a_n = a$.

D'après la question précédente :

$$\Delta(P) = \Delta\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta(X^k)$$

D'après la question (1b), pour tout $k = 1, \dots, n$ le polynôme $\Delta(X^k)$ est de degré $k-1$ et de coefficient dominant $a_k k$.
Dans cette même question on a vu qu'il existe un polynôme R_n de degré au plus $n-2$ tel que $\Delta(X^n) = nX^{n-1} + R_n(X)$. Ainsi :

$$\Delta(P) = a\Delta(X^n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta(X^k) = anX^{n-1} + \left[aR_n(X) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta(X^k)\right].$$

Le degré du terme entre crochets est inférieur ou égal à $n-2$, donc $\Delta(P)$ est de degré $n-1$ et de coefficient dominant an.

4. (a) *(2 points)* L'équation $\Delta(P) = 0$ équivaut à :

$$P(X) = P(X - 1).$$

Soit P un polynôme vérifiant cette équation.
Supposons que P admet une racine α. Alors en spécialisant en α :

$$P(\alpha - 1) = P(\alpha) = 0.$$

Donc $\alpha - 1$ est aussi racine.
Par récurrence immédiate, $\alpha - k$ est racine pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc P admet une infinité de racines.
Seul le polynôme nul admet une infinité de racines, donc $P = 0$.
Si P n'admet pas de racine, alors P est constant non-nul. En effet, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.
Finalement, si $\Delta(P) = 0$ alors P est constant, nul ou non-nul.
Réciproquement, si P est constant alors $P(X) = P(X - 1)$ donc $\Delta(P) = 0$.
Les polynômes vérifiant $\Delta(P) = 0$ sont donc les polynômes constants.

(b) *(1 point)* D'après la question (2) :

$$\Delta(P) = \Delta(Q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta(P) - \Delta(Q) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta(P - Q) = 0$$

D'après la question précédente, $\Delta(P - Q) = 0$ si et seulement si $P - Q$ est constant, donc si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $P = Q + k$.
On a démontré que pour tous polynômes P et Q :

$$\Delta(P) = \Delta(Q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{C} \quad P = Q + k.$$

Partie B. Surjectivité de Δ *(4 points)*

1. (a) *(1 point)* Notons $B = Q - \Delta(\lambda X^{n+1})$.
   Comme Q et $\Delta(\lambda X^{n+1})$ sont de degré n, alors B est de degré au plus n.
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\Delta(\lambda X^{n+1}) = \lambda\Delta(X^{n+1})$.
   D'après la question (1b) de la partie A le terme de plus haut degré de $\Delta(X^{n+1})$ est $(n+1)X^n$.
   Le terme de plus haut degré de Q est aX^n.
   Le terme de degré n de B est donc $a - \lambda(n+1)$.
   Posons $\lambda = \frac{a}{n+1}$. Alors $a - \lambda(n+1) = 0$.
   Le terme de degré n de B est nul, donc B est de degré au plus $n-1$.
   On a démontré que si $\lambda = \frac{a}{n+1}$ alors $Q - \Delta(\lambda X^{n+1}) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

   (b) *(1 point)* On note $B = Q - \Delta(\lambda X^{n+1})$ avec $\lambda = \frac{a}{n+1}$.
   Alors $B \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie donc il existe $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(A) = B$, *i.e.*, :
   $$\Delta(A) = Q - \Delta(\lambda X^{n+1}).$$
   Ceci donne :
   $$Q = \Delta(A) + \Delta(\lambda X^{n+1}) = \Delta(A + \lambda X^{n+1}).$$
   En notant $P = A + \lambda X^{n+1}$ on montre qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.

2. *(2 points)* Le propriété $\mathcal{P}_n$ est :
   $$\text{Pour tout } Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ il existe } P \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } \Delta(P) = Q.$$
   Démontrons par récurrence forte que cette $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation. Si $Q \in \mathbb{C}_{-1}[X]$ alors Q est un polynôme de degré au plus -1 donc Q est nul. Ainsi $Q = \Delta(0)$, et il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
   La propriété $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.
   Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ les propriétés $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ sont vraies.
   Soit Q un polynôme de degré au plus n.
   Si Q est de degré m strictement inférieur à n alors $Q \in \mathbb{C}_m[X]$. On a $m < n$ donc $m + 1 \leqslant n$ et ainsi la propriété $\mathcal{P}_{m+1}$ est supposée vraie : il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
   Si Q est de degré n alors d'après la question précédente, comme on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
   Tout polynôme Q de degré au plus n admet un antécédent, donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. L'hérédité est démontrée.
   Conclusion. Par récurrence forte la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   Comme tout polynôme admet un degré, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ admet un antécédent par Δ, ce qui montre que Δ est surjective.

Partie C. Nombres de Bernoulli *(11 points)*

1. *(1 point)* Comme l'application Δ est surjective alors le polynôme $(X-1)^n$ admet un antécédent P_1 : il existe $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta(P_1) = (X-1)^n$.
   Posons $a = P_1(1)$ et $P = P_1 - a$. Alors :
   $$P(1) = P_1(1) - a = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta(P) = \Delta(P_1) - \Delta(a) = (X-1)^n - 0 = (X-1)^n.$$
   Soit Q un autre polynôme tel que $\Delta(Q) = (X-1)^n$ et $Q(1) = 0$.
   Alors $\Delta(P) = \Delta(Q)$ donc d'après la question (4b) de la partie A il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $P = Q + k$.
   Comme $P(1) = Q(1) = 0$ alors $k = 0$ et ainsi $P = Q$.
   On a démontré qu'il existe un et un seul polynôme P tel que :
   $$\Delta(P) = (X-1)^n \qquad \text{et} \qquad P(1) = 0.$$

On note S_n ce polynôme, donc $\Delta(S_n) = (X-1)^n$ et $S_n(1) = 0$.

2. *(1 point)* Soit m le degré de S_n et a son coefficient dominant.
   D'après la question (3) de la partie A le terme de plus haut degré de S_n est amX^{m-1}.
   Or $\Delta(S_n) = (X-1)^n$, donc son terme de plus haut degré est X^n.
   Ainsi $amX^{m-1} = X^n$ donc $m = n+1$ et $a = \frac{1}{n+1}$.
   Donc S_n est de degré $n+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{n+1}$.
3. *(1 point)* Comme $\Delta(S_n) = (X-1)^n$ alors :
   $$S_n(X) - S_n(X-1) = (X-1)^n$$
   On en déduit par spécialisation en $j+1$:
   $$\forall j \in \mathbb{C} \qquad S_n(j+1) - S_n(j) = j^n.$$
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par somme et télescopage :
   $$\sum_{j=0}^{k-1} j^n = \sum_{k=0}^{k-1} (S_n(j+1) - S_n(j)) = S_n(k) - S_n(1).$$
   Comme $S_n(1) = 0$ alors on obtient bien : $\quad S_n(k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} j^n.$

4. *(2 points)* Soit P un polynôme tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(k) = \sum_{j=0}^{k-1} j^n$.

   On sait que $\Delta(P) = P(X) - P(X-1)$.
   En spécialisant en k pour $k \in \mathbb{N}^*$ on obtient : $\Delta(P)(k) = P(k) - P(k-1)$.
   Si $k \geqslant 2$ alors $k-1 \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ donc :
   $$\Delta(P)(k) = \sum_{k=0}^{k-1} j^n - \sum_{k=0}^{k-2} j^n = (k-1)^n.$$
   Or on sait que $\Delta(S_n) = (X-1)^n$, donc :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \Delta(S_n)(k) = (k-1)^n.$$
   Les polynômes $\Delta(P)$ et $\Delta(S_n)$ sont égaux en une infinité de points donc ils sont égaux.
   En effet $(\Delta(P) - \Delta(S_n))(k) = 0$ pour tout entier $k \geqslant 2$ donc le polynôme $\Delta(P) - \Delta(S_n)$ admet une infinité de racines, et il est nul.
   Comme $\Delta(P) = \Delta(S_n)$ alors il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $P = S_n + k$.
   Or $S_n(1) = 0$ et $P(1) = \sum_{j=0}^{0} j^n = 0$, donc $k = 0$ et ainsi $P = S_n$.

5. *(2 points)* On connaît les formules suivantes, valables pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
   $$\sum_{j=0}^{k-1} 1 = k \qquad \sum_{j=0}^{k-1} j = \frac{k(k-1)}{2} \qquad \sum_{j=0}^{k-1} j^2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \qquad \sum_{j=0}^{k-1} j^3 = \frac{k^2(k-1)^2}{4}$$
   Ainsi le polynôme $P = X$ vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(k) = \sum_{j=0}^{k-1} j^0$.
   D'après la question précédente $S_0 = X$.
   De même le polynôme $P = \frac{X(X-1)}{2}$ vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(k) = \sum_{j=0}^{k-1} j$.
   D'après la question précédente $S_1 = \frac{1}{2}X(X-1)$.
   De même on en déduit $S_2 = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-1)$ et $S_3 = \frac{1}{4}X^2(X-1)^2$.
   On constate que pour n allant de 0 à 3 le polynôme S_n est bien de degré $n+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{n+1}$.

6. *(1 point)* On sait déjà que $S_n(1) = 0$.
   Comme $\Delta(S_n) = (X-1)^n$, alors $S_n(X) - S_n(X-1) = (X-1)^n$.
   En spécialisant en 1 : $S_n(1) - S_n(0) = 0$ donc $S_n(0) = 0$.

7. *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question (2) de la partie A :
   $$\Delta(S_n' - nS_{n-1}) = \Delta(S_n') - \Delta(nS_{n-1}) = \Delta(S_n)' - n\Delta(S_{n-1})$$
   Comme $\Delta(S_n) = (X-1)^n$ et $\Delta(S_{n-1}) = (X-1)^{n-1}$ alors :
   $$\Delta(S_n' - nS_{n-1}) = n(X-1)^{n-1} - n(X-1)^{n-1} = 0$$
   On en déduit d'après la question (4a) de la partie A que $S_n' - nS_{n-1}$ est constant, donc il existe $b_n \in \mathbb{C}$ tel que $S_n' = nS_{n-1} + b_n$.

8. *(1 point)* D'après la question précédente il existe $b_4 \in \mathbb{C}$ tel que $S_4' = 4S_3 + b_4$. Donc :

$$S_4' = X^2(X-1)^2 + b_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 + b_4.$$

Il existe donc $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$S_4 = \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 + b_4 X + a.$$

Comme $S_4(0) = S_4(1) = 0$ alors $a = 0$ et $0 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + b_4$, ce qui donne $b_4 = -\frac{1}{30}$.
Ainsi $S_4 = \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X$.
On peut en déduire la formule :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{j=0}^{k-1} j^4 = \frac{1}{5}k^5 - \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{30}k = \frac{k(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1)}{30}.$$

9. *(1 point)* On démontre par récurrence sur n la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \frac{X^{n+1-k}}{n+1-k}.$$

<u>Initialisation.</u> Pour $n = 0$ on obtient bien $S_0 = X$.
<u>Hérédité.</u> Supposons que la formule est vraie pour un certain $n-1$ où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k \frac{X^{n-k}}{n-k}.$$

La formule $S_n' = nS_{n-1} + b_n$ donne alors :

$$S_n' = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} b_k \frac{X^{n-k}}{n-k} + b_n.$$

Par intégration il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} b_k \frac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)(n-k)} + b_n X + a.$$

Comme $S_n(0) = 0$ alors $a = 0$.
On calcule $n\binom{n-1}{k} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)$ donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k \frac{X^{n+1-k}}{n+1-k} + b_n X.$$

Si $k = n$ alors $\binom{n}{k} b_k \frac{X^{n+1-k}}{n+1-k} = b_n X$ donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \frac{X^{n+1-k}}{n+1-k}.$$

La formule est donc vraie au rang n, et l'hérédité est démontrée.