Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 5 février 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°9

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\begin{aligned} &\exists c \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(c) \leqslant 1 \\ &\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \end{aligned} \qquad (\star)$$

1. (a) Démontrer que si une solution f du problème vérifie $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
   (b) Quelles sont les solutions constantes du problème ?

On suppose dorénavant que f est une solution du problème non constante.

2. (a) Démontrer que $f(0) = 1$.
   (b) Démontrer que f est paire.
3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer une relation simple entre $f(x)$ et $\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f\left(\dfrac{c}{2^n}\right) \leqslant 1$
4. (a) Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [0, \varepsilon] \quad f(x) \geqslant 0$
   (b) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) \leqslant 1$ et : $\forall x \in [0, a] \quad f(x) \geqslant 0$

On pose dorénavant $\theta = \arccos f(a)$.

5. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$
   (b) Démontrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$: $f\left(p\dfrac{a}{2^n}\right) = \cos\left(p\dfrac{\theta}{2^n}\right)$
6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $p_n = \left\lfloor \dfrac{2^n x}{a} \right\rfloor$.
   Déterminer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{2^n}$
7. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \cos(\alpha x)$
8. Conclure : quel est l'ensemble des solutions du problème ?