Corrigé du Devoir à la Maison n°9

1. (a) Soit f une solution du problème telle que $f(0) = 0$.
La relation $(\star)$ est valable pour tout couple (x, y) de réels. En particulier pour $y = 0$ elle donne :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2f(x) = 2f(x)f(0)$$
Si $f(0) = 0$ alors on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 0$$
Ainsi f est la fonction nulle.

   (b) Soit f une solution constante du problème. Il existe alors un réel K tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = K$$
La relation $(\star)$ donne :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad K + K = 2K^2$$
Ceci implique $K^2 - K = 0$ donc $K = 0$ ou $K = 1$.
Réciproquement la fonction nulle vérifie la relation $(\star)$, la fonction constante égale à 1 la vérifie également, ces deux fonctions sont continues et il existe bien $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(c) \leqslant 1$ (par exemple $c = 1$), puisque dans les deux cas $K \leqslant 1$.
Ces deux fonctions sont donc bien solutions du problème.
Les solutions constantes du problème sont donc les fonctions constantes égales à 0 et à 1.

2. (a) On suppose que f est une solution du problème. La relation $(\star)$ avec $y = 0$ donne :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2f(x) = 2f(x)f(0)$$
On suppose que f n'est pas constante, donc elle n'est pas identiquement nulle, et ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a)$ est non-nul. Comme $2f(a) = 2f(a)f(0)$ et $f(a)$ est non-nul alors $f(0) = 1$.

   (b) Pour $x = 0$ la relation $(\star)$ donne :
$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$$
Par soustraction :
$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f(-y) = f(y)$$
De plus f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0, donc f est paire.

3. (a) Pour $x = y$ la relation $(\star)$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) + f(0) = 2(f(x))^2$$

Si $x \in \mathbb{R}$ alors $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}$, et comme $f(0) = 1$ alors on obtient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 \tag{\dagger}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad f\left(\dfrac{c}{2^n}\right) \leqslant 1$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme f est solution du problème alors $f(c) \leqslant 1$, donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

D'après la relation (†), pour $x = \frac{c}{2^n}$:

$$f\left(\frac{c}{2^n}\right) = 2\left(f\left(\frac{c}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - 1$$

Ceci donne :

$$\left(f\left(\frac{c}{2^{n+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{c}{2^n}\right) + 1\right)$$

Comme la proposition $\mathcal{P}_n$ est supposée vraie alors $f\left(\frac{c}{2^n}\right) \leqslant 1$ et donc :

$$\left(f\left(\frac{c}{2^{n+1}}\right)\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Ceci montre que $\left|f\left(\frac{c}{2^{n+1}}\right)\right| \leqslant 1$ et donc $f\left(\frac{c}{2^{n+1}}\right) \leqslant 1$: la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f\left(\frac{c}{2^n}\right) \leqslant 1$$

4. (a) Comme la fonction est solution du problème alors elle est continue.

On sait que $f(0) = 1$, donc $f(0)$ est strictement positif. Alors f est strictement positive – donc positive – au voisinage de 0, donc sur un intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ pour un certain réel ε strictement positif.

En effet : comme f est continue en 0 alors par définition :

$$\forall \alpha > 0 \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x - 0| \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(0)| \leqslant \alpha$$

Pour $\alpha = 1$, comme $\alpha > 0$ alors :

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| \leqslant \varepsilon \quad &\Longrightarrow \quad -1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 2 \end{aligned}$$

Si $x \in [0, \varepsilon]$ alors $|x| \leqslant \varepsilon$ donc $f(x) \geqslant 0$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que : $\quad \forall x \in [0, \varepsilon] \quad f(x) \geqslant 0$

On fixe un tel réel ε pour la suite.

(b) La suite $\left(\frac{c}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Le réel ε obtenu dans la question précédente est strictement positif, donc par définition de la convergence :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{c}{2^n} - 0\right| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

Posons $a = \dfrac{c}{2^N}$.

Alors a est strictement positif car c est strictement positif, et $f(a) \leqslant 1$ d'après la question 3 (b).

De plus $\frac{c}{2^N} \leqslant \varepsilon$ d'après (1) donc $[0, a] \subseteq [0, \varepsilon]$, et d'après la question précédente :

$$\forall x \in [0, a] \qquad f(x) \geqslant 0$$

On a donc justifié l'existence d'un réel a strictement positif tel que $f(a) \leqslant 1$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0, a]$.

5. On fixe un réel $a > 0$ vérifiant les propriétés :

$$f(a) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0, a] \quad f(x) \geqslant 0$$

Alors $f(a) \in [0, 1]$, donc $\theta = \arccos f(a)$ est défini.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $\quad \theta = \arccos f(a) \quad$ alors : $\quad \cos\theta = \cos\left(\arccos f(a)\right) = f(a)$

En effet par définition de la fonction arc-cosinus :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos x) = x$$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est donc vraie : $\quad f(a) = \cos\theta$

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

La relation (†) appliquée à $x = \frac{a}{2^n}$ donne :

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - 1$$

On en déduit, comme la relation $\mathcal{P}_n$ est supposée vraie :

$$\left(f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) + 1\right)$$

La formule de trigonométrie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

montre que :

$$\left(f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right)^2 = \left(\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)^2$$

Justifions que $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$ et $\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$ sont positifs :

- $\frac{a}{2^{n+1}}$ appartient à l'intervalle $[0,a]$ donc d'après la question 4 (b) : $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \geqslant 0$
- Comme $f(a) \in [0,1]$ alors $\arccos f(a) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis $\frac{\theta}{2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ainsi $\cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \geqslant 0$.

On en déduit que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie :

$$f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \cos \frac{\theta}{2^{n+1}}$$

L'hérédité est donc justifiée.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

(b) On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on définit la propriété :

$$\mathcal{P}_p : \qquad f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = \cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right)$$

On démontre par récurrence double que la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $p = 0$ la propriété s'écrit $f(0) = 1$ donc elle est vraie d'après la question 2 (a).

Pour $p = 1$ la propriété s'écrit $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$, elle est vraie d'après la question précédente.

Hérédité. Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{N}$ les propriétés $\mathcal{P}_p$ et $\mathcal{P}_{p+1}$ sont vraies. On applique alors la relation $(\star)$ avec $x = (p+1)\frac{a}{2^n}$ et $y = \frac{a}{2^n}$. Elle donne :

$$f\left((p+2)\frac{a}{2^n}\right) + f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = 2f\left((p+1)\frac{a}{2^n}\right)f\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

Comme la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie aux rangs 1, p et $p+1$ alors :

$$f\left((p+2)\frac{a}{2^n}\right) + \cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right) = 2\cos\left((p+1)\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

On utilise la formule de transformation de produit en somme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos x \cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Elle donne :

$$f\left((p+2)\frac{a}{2^n}\right) = \cos\left((p+2)\frac{\theta}{2^n}\right) + \cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right) - \cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right) = \cos\left((p+2)\frac{\theta}{2^n}\right)$$

Ceci montre que la propriété $\mathcal{P}_{p+2}$ est vraie, et justifie donc l'hérédité de la récurrence double.

Conclusion. Par récurrence double la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, et comme cette démonstration est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = \cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right)$$

6. Comme $p_n = \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor$ alors par propriété de la partie entière :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{2^n x}{a} - 1 < p_n \leqslant \frac{2^n x}{a}$$

Comme 2^n est strictement positif alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{x}{a} - \frac{1}{2^n} < \frac{p_n}{2^n} \leqslant \frac{x}{a}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{x}{a}$ alors par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{2^n} = \frac{x}{a}$$

7. Soit x un réel positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $p_n = \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor$.
Alors p_n est entier et donc d'après la question 5 (b) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f\left(\frac{p_n}{2^n} a\right) = \cos\left(\frac{p_n}{2^n}\theta\right) \tag{2}$$

On a démontré dans la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{2^n} = \frac{x}{a}$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{p_n}{2^n} a\right) = x \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{p_n}{2^n}\theta\right) = \frac{x\theta}{a}$$

Les fonctions f et cosinus sont continues, donc f est continue en x et cos est continue en $\frac{x\theta}{a}$, puis :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{p_n}{2^n} a\right) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{p_n}{2^n}\theta\right) = \cos\left(\frac{x\theta}{a}\right)$$

Par unicité de la limite l'égalité (2) donne :

$$f(x) = \cos\left(\frac{x\theta}{a}\right)$$

On pose $\alpha = \frac{\theta}{a}$. On a donc démontré que $f(x) = \cos(\alpha x)$.
Cette formule est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, car la valeur de α ne dépend pas de x.
Si x est négatif, alors $-x$ est positif, donc en appliquant ce qui précède :

$$f(-x) = \cos(-\alpha x)$$

La fonction f est paire d'après la question 2 (b), et la fonction cosinus est paire également, donc $f(x) = \cos(\alpha x)$: cette égalité est valable aussi pour x négatif.
On a donc démontré que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(\alpha x)$$

8. D'après les questions précédentes, si f est une solution non constante du problème alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(\alpha x)$$

Réciproquement, si f est la fonction $x \mapsto \cos(\alpha x)$ pour un certain réel α, alors elle est solution du problème. En effet :

- La fonction $f : x \mapsto \cos(\alpha x)$ est continue par composition.
- Il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(c) \leqslant 1$.
  Si $\alpha \neq 0$ alors par exemple $x = \frac{\pi}{\alpha}$ convient car $f(c) = -1$
  Si $\alpha = 0$ alors $x = \pi$ convient car $f(\pi) = 1$.
- Le relation $(\star)$ s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos(\alpha x + \alpha y) + \cos(\alpha x - \alpha y) = 2\cos(\alpha x)\cos(\alpha y)$$

  C'est une conséquence directe de l'une des formules de transformation de produit en somme.

Ajoutons que si f est une solution constante alors f est la fonction nulle ou la fonction constante égale à 1, mais cette dernière est déjà la fonction $x \mapsto \cos(\alpha x)$ pour $\alpha = 0$.

On peut donc énoncer pour conclure que les solutions du problème sont :

- Les fonctions $x \mapsto \cos(\alpha x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
- La fonction nulle.