Chapitre B8
Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle scalaires ses éléments.

I. Espaces vectoriels

A. Définitions

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux opérations

$$+ : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \qquad \text{et} \qquad \cdot : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

appelées addition et multiplication par un scalaire, satisfaisant les propriétés suivantes :

- L'addition est commutative : $\forall (u, v) \in E^2 \qquad u + v = v + u$
- L'addition est associative : $\forall (u, v, w) \in E^3 \qquad (u + v) + w = u + (v + w)$
- Il existe un vecteur de E noté 0_E et appelé vecteur nul, vérifiant :
$$\forall u \in E \qquad u + 0_E = 0_E + u = u$$
- Tout vecteur u de E possède un opposé noté $-u$, satisfaisant :
$$u + (-u) = (-u) + u = 0_E$$
On note $v - u$ au lieu de $v + (-u)$.

La multiplication par un scalaire vérifie :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (u, v) \in E^2 \qquad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall u \in E \qquad 1_{\mathbb{K}} u = u$

Remarques.

(i) L'addition est une loi de composition interne alors que la multiplication par un scalaire est une loi de composition externe.

(ii) Les quatre premiers points signifient que $(E, +)$ est un groupe abélien.
Ainsi un espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ où $(E, +)$ est un groupe abélien et $\cdot$ est une loi vérifiant les propriétés ci-dessus.

Propositions. *Pour tout* $(u,v) \in E^2$ *et tout* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ *:*

(i) $0_{\mathbb{K}}u = 0_E$

(ii) $\lambda 0_E = 0_E$

(iii) $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$

(iv) $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

(v) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

Proposition. *Soit* $u \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors :*

$$\lambda u = 0_E \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad u = 0_E)$$

Démonstrations.

B. Espaces vectoriels de référence

- Espace vectoriel des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i = 1, \ldots, n \quad x_i \in \mathbb{K}\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Si $\quad x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad y = (y_1, \ldots, y_n) \quad$ et $\quad \lambda \in \mathbb{K} \quad$ alors :

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{et} \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Opposé : $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0)$

Exemples. $\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3$ mais aussi $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K} \quad \mathbb{K}^0 = \{0\}$

- Espace vectoriel des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad (n,\, p \in \mathbb{N}^*)$$

Si $\quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad$ et $\quad \lambda \in \mathbb{K} \quad$ alors :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \qquad \text{et} \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Opposé : $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ Vecteur nul : $0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})} = 0_{np} = (0)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

- Espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[X]$$

Si $\quad P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \quad$ et $\quad \lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \qquad \text{et} \qquad \lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

Opposé : $-P = \sum_{k=0}^{+\infty} -a_k X^k$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}[X]} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0_{\mathbb{K}} X^k = 0_{\mathbb{K}}$

- Espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^\Omega \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) \qquad (\Omega \text{ est un ensemble non-vide})$$

Si f et g sont deux applications de Ω dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on définit :

$$\begin{array}{rcl} f+g : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda f : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda\, f(x) \end{array}$$

En d'autres termes :

$$\forall x \in \Omega \qquad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

Opposé : $-f$ est l'application $x \mapsto -f(x)$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}^\Omega}$ est l'application $x \mapsto 0_{\mathbb{K}}$

Exemples.

- $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, aussi noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ est l'espace vectoriel des suites indexées par $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites et λ un scalaire alors

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- $\mathbb{R}^\Omega$ avec $\Omega = \{1, \dots, n\}$ est naturellement identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

- Produit cartésien de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Le produit cartésien des ensembles E et F est :

$$E \times F = \{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Il est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si on le munit des opérations suivantes :

Pour tous (x,y), (x',y') éléments de $E \times F$ et λ scalaire on pose :

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \qquad \text{et} \qquad \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Opposé : $-(x,y) = (-x,-y)$ Vecteur nul : $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$

- Produit cartésien de n espaces vectoriels :

Plus généralement, si $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ est une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, alors

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni des opérations évidentes d'addition et de multiplication par un scalaire termes à termes.

II. Sous-espaces vectoriels

A. Définition

Définition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E non-vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire, *i.e.,* telle que :

$$\begin{array}{ll} \forall (u,v) \in F^2 & u+v \in F \\ \forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} & \lambda u \in F \end{array}$$

Proposition (Caractérisation des sous-espaces vectoriels). *Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

(i) $F \subseteq E$

(ii) $0_E \in F$

(iii) $\forall (u,v) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u + v \in F$

Démonstration. Si F est une partie non-vide de E alors elle contient un vecteur u. comme $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ alors $0_{\mathbb{K}} u \in F$, donc $0_E \in F$.

Le reste se démontre facilement. □

Remarque. Pour démontrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E on utilise la caractérisation plutôt que la définition.

Proposition. *Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F est un espace vectoriel.*

Démonstration. Comme F est stable par les lois d'addition et de multiplication par un scalaire de E, alors par restriction ces lois donnent des lois :

$$+ : F \times F \to F \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times F \to F$$

Comme elles vérifient les axiomes de définition d'un espace vectoriel dans E alors elles vérifient aussi ces lois dans F. □

Remarque. Pour démontrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, il est souvent plus facile de vérifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence, comme $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}[X]$.

Définition. Soit u_1, $u_2, \ldots, u_n$ des éléments de E et λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des scalaires. Alors le vecteur

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs u_1, $u_2 \ldots u_n$.

Remarques.

(i) Une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs d'un espace vectoriel est élément de cet espace vectoriel, car un sous-espace vectoriel est stable par addition et multiplication par un scalaire.

(ii) Un sous-espace vectoriel de E est une partie non-vide de E stable par combinaisons linéaires.

B. Exemples

Remarque. Quel que soit l'espace vectoriel E, les ensembles $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemples géométriques.

(i) Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ est l'ensemble :

$$\{\, \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Il s'agit de la droite passant par l'origine, de vecteur directeur $\vec{u}$.
C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble

$$\left\{ \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors il s'agit du plan contenant l'origine, dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques.

(i) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ et $\mathbb{R}^2$ tout entier.

(ii) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, les plans contenant $0_{\mathbb{R}^3}$, et $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Exemple 1. $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De même pour $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, etc.

▷ **Exercices 1, 2, 3.**

C. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition. *Soit* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E. *Alors* $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration.

D. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{F}$:

Proposition. *L'ensemble* $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Définition. Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E alors l'ensemble $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ est appelé sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$.

Exemples.

(i) Dans $E = \mathbb{R}^2$:

$F = \operatorname{Vect}(u)$ est

$G = \operatorname{Vect}(u, v)$ est

(ii) Dans $E = \mathbb{K}[X]$:

$\operatorname{Vect}(1, X) =$ $\operatorname{Vect}(1) =$ $\mathbb{K}_2[X] =$

(iii) Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, soit :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{22}) =$ $\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{22}) =$

$\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{21}, E_{22}) =$ $\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) =$

Démonstration de la proposition.

Remarque. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble vide est le plus petit espace vectoriel possible :

$$\mathrm{Vect}\,(\varnothing) =$$

▷ **Exercice 4.**

Exemple 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ $u = (1, 3, 1)$ $v = (-1, -1, 0)$ $w = (0, 4, 2)$.
Quel est le sous-espace vectoriel F de E engendré par u, v, et w ?

Remarques. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs de E et w un vecteur de E.

(i) Si $w \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F} \cup \{w\}) =$

(ii) Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$

Propositions. *Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :*

(i) $\text{Vect}(\mathcal{F})$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.*

(ii) $\text{Vect}(\mathcal{F})$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.*

Remarque. Le point *(i)* signifie : Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E et G un sous-espace vectoriel de E. Alors :

Démonstration. *(ii)* Soit F l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$:

$$F = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{F} \subseteq G}} G$$

Comme $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$, alors $F \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, choisissons un élément u de $\text{Vect}(\mathcal{F})$:

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

où les λ_i sont des scalaires et les u_i appartiennent à $\mathcal{F}$.

Les u_i appartiennent alors à tous les sous-espaces vectoriels G de E contenant $\mathcal{F}$. Comme ceux-ci sont des sous-espaces vectoriels, ils sont stables par combinaison linéaire et donc contiennent tous u. Ainsi u est élément de F.

On en déduit que $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq F$, puis par double inclusion $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

(i) Nous savons que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{F}$. D'après ce qui précède, il est clair que si G est un autre sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$, car $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les tels sous-espaces vectoriels.

Ceci signifie que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$. $\square$

III. Sommes de sous-espaces vectoriels

A. Somme

Remarque. En général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E, comme le montre l'exemple de deux droites non confondues de $\mathbb{R}^2$.

Notation. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $F + G$ l'ensemble des sommes d'un élément de F et d'un élément de G :

Proposition. *Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition. Le sous-espace vectoriel $F + G$ de E est appelé somme de F et de G.

Démonstration.

(i) Si F et G sont inclus dans E, alors tout élément u de F et tout élément v de G est élément de E. Comme celui-ci est stable par addition, car c'est un espace vectoriel, alors $u + v \in E$. Ceci montre l'inclusion $F + G \subseteq E$.

(ii) Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors ils contiennent 0_E. Or $0_E = 0_E + 0_E$, donc $0_E \in F + G$.

(iii) Soit w_1 et w_2 deux éléments de $F + G$ et λ un scalaire. Alors il existe $(u_1, u_2) \in F^2$ et $(v_1, v_2) \in G^2$ tels que $w_1 = u_1 + v_1$ et $w_2 = u_2 + v_2$. Par les propriétés des opérations sur les espaces vectoriels :

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (\lambda u_1 + u_2) + (\lambda v_1 + v_2)$$

Comme F est un sous-espace vectoriel alors $\lambda u_1 + u_2 \in F$, comme G est un sous-espace vectoriel alors $\lambda v_1 + v_2 \in G$, donc $\lambda w_1 + w_2 \in F + G$. Ainsi $F + G$ est stable par combinaisons linéaires.

Finalement, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Remarques.

(i) La somme $F + G$ contient F et G :

(ii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E :

$F + \{0_E\} =$ $F + E =$ $F + F =$

▷ **Exercice 5.**

Exemple 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 2, 1)$, $F = \mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(\vec{u}_2)$. Donner une équation de $F + G$.

Remarque. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux familles de vecteurs de E alors :

$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) + \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G}) =$

B. Somme directe

Définition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On dit que F et G sont en somme directe ou que la somme $F + G$ est directe si tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Proposition. *Les sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.*

Démonstration.

T. S. V. P.

▷ **Exercice 6.**

C. Supplémentaires

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires si tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

Exemple 5. Soit

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\vec{\imath}) \qquad G = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\vec{\jmath})\,.$$

Alors F et G sont supplémentaires.

Notation. Si F et G sont supplémentaires alors on note :

Exemple 6. Soit $E = \mathbb{R}^3$ puis

$$F = \left\{(x,y,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\,(\vec{\imath},\vec{\jmath}) \quad G = \left\{(0,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\vec{\jmath},\vec{k}\right).$$

Alors $E = F + G$ mais cette somme n'est pas directe.

Théorème. *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$:*

Démonstration. Conséquence des deux parties précédentes. □

Remarques.

(i) Il est possible d'avoir $E = F \oplus G = F \oplus H$ avec G et H différents.
Dans ce cas G est un supplémentaire de F, et H en est un autre.
Pour cette raison il est incorrect d'écrire *le* supplémentaire de F, il faut écrire *un* supplémentaire de F.

(ii) Dans tous les cas : $E = E \oplus \{0_E\}$.

(iii) Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.
En effet le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel, car il ne contient pas 0_E.

▷ **Exercice 7.**

IV. Familles de vecteurs

Dans toute cette partie E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

A. Familles génératrices

Définition. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E si $E = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Exemple 7. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_1 = ((1,0,0),(0,1,0)) \qquad \mathcal{F}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0))$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)) \qquad \mathcal{F}_4 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,0))$$

$$\mathcal{F}_5 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0),(0,0,1))$$

Celles qui sont génératrices de $\mathbb{R}^3$ sont

Proposition. *Si $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E et si u_p est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_{p-1}$ alors la famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$ est génératrice de E.*

Démonstration. Comme u_p est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_{p-1}$ alors il existe des scalaires $\alpha_1, \dots \alpha_{p-1}$ tels que :

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{p-1} u_{p-1}$$

Comme la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E alors pour tout u de E il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$$

Ceci donne :

$$u = (\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1) u_1 + \dots + (\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}) u_{p-1}$$

Ainsi tout vecteur u de E est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_{p-1}$ et donc que la famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$ est génératrice de E. $\square$

Proposition. *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux famille de vecteurs de E telles que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.*
Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $\mathcal{G}$ est génératrice de E.

Démonstration. En effet, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors $\text{Vect}\,(\mathcal{F}) \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{G})$.

Donc si $E = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$ alors $E \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{G}) \subseteq E$, donc $E = \text{Vect}\,(\mathcal{G})$ et $\mathcal{G}$ est génératrice de E. $\square$

Exemple 8. Donner une famille génératrice de :
(i) $F = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$.
(ii) $G = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 4z = 0\}$

▷ **Exercice 8.**

Proposition. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $\mathcal{F}$ un famille génératrice de F. Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.*

Plus précisément, si $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ alors :

- *Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:*

$$F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + \alpha u_j, u_{i+1}, \ldots, u_p)$$

- *Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$:*

$$F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_{i-1}, \lambda u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p)$$

- *Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ avec $i < j$:*

$$F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, \underset{(i)}{u_j}, \ldots, \underset{(j)}{u_i}, \ldots, u_p)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F}'$ la famille obtenue par opération élémentaire sur les élément de $\mathcal{F}$, et $F' = \operatorname{Vect}(\mathcal{F}')$.

On vérifie que $\mathcal{F}' \subseteq \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Vect}(\mathcal{F}')$.

Par propriété ceci implique $F' \subseteq F$ et $F \subseteq F'$, donc $F = F'$. □

Proposition. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F et $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de G, alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une famille génératrice de $F + G$.*

Démonstration. On note $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ et $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_q)$. Comme $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F et $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de G alors

$$\begin{aligned} F &= \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\} \\ \text{et} \quad G &= \{\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q \mid (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q\} \end{aligned}$$

Par définition : $F + G = \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F + G &= \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}\} \\ &= \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q) \\ &= \operatorname{Vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Ceci montre bien que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est génératrice de $F + G$. □

B. Familles libres

Définitions. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre si :

Dans ce cas on dit aussi que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendants.

Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée, ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont linéairement dépendants.

Proposition. *Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration.

Exemple 7 (suite).

Parmi les familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$ celles qui sont libres sont

▷ **Exercices 9, 10.**

Proposition. *Soit $u_1, \dots, u_{p+1}$ des vecteurs de E.*
(i) Si la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est libre alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
(ii) Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée alors la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée.
(iii) Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre alors la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée si et seulement si u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$.

Démonstration. La propriété *(ii)* est conséquence de la propriété précédente, la propriété *(i)* est la contraposée de la propriété *(ii)*.

Démontrons la propriété *(iii)*.

Supposons que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et que la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée.

Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E$.

Si $\lambda_{p+1} = 0$ alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$, ce qui implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ car la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Mais la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$ est supposée non-nulle, donc on ne peut avoir $\lambda_{p+1} = 0$.

Ainsi $\lambda_{p+1} \neq 0$, donc $u_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}}\right) u_i$, *i.e.*, u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$.

Réciproquement, si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$ alors la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée d'après la proposition précédente. □

Proposition.
- *La famille vide est libre.*
- *Soit u un vecteur de E. Alors la famille (u) est libre si et seulement si u est non-nul.*
- *Soit u et v deux vecteurs de E. La famille (u, v) est libre si et seulement si aucun des deux vecteurs n'est colinéaire à l'autre.*
  En d'autres termes, la famille (u, v) est liée s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$.

Proposition. *Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.*

Démonstration. Soit $(P_i)_{i=0\dots n}$ une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts.

Quitte à permuter les polynômes P_i on peut supposer qu'ils sont de degrés strictement croissants.

Soit $(\lambda_i)_{i=0,\dots,n}$ une famille de scalaires telle que : $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Supposons que cette famille n'est pas la famille nulle. Il existe alors un indice m maximal tel que λ_m est non-nul, et donc :

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]} \qquad \text{puis} \qquad P_m = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} P_i$$

Comme la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est de degrés strictement croissants alors les degrés de $P_0, \dots, P_{m-1}$ sont strictement inférieurs à celui de P_m donc :

$$\deg\left(-\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} P_i\right) \leqslant \max\{\deg P_i \mid i = 0 \dots m-1\} < \deg P_m$$

Ceci est une contradiction, donc la famille $(\lambda_i)_{i=0\dots n}$ est nulle, et ainsi la famille $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre. □

Définition. Une famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes est dite de degrés échelonnés si la suite $(\deg P_i)_{i=0\ldots n}$ est strictement croissante.

Corollaire. *Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre.*

Exemple 9. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et f_1, f_2, f_3 les trois vecteurs de E définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \cos x \quad f_2(x) = \sin x \quad f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Alors la famille (f_1, f_2) est libre.

▷ **Exercice 11.**

C. Bases

Définition. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 7 (suite).

Parmi les familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$ les bases sont

Théorème. *Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E et u un vecteur de E.*
Alors il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Définition. On appelle coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ ce n-uplet.

Démonstration.

Proposition. *Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Si pour tout $u \in E$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires tel que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ alors $\mathcal{B}$ est une base de E.*

Démonstration. La famille $\mathcal{B}$ est génératrice car tout vecteur de E est combinaison linéaire de ses vecteurs.

Démontrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un n-uplet de scalaires tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$$

Par hypothèse 0_E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des u_i. Or :

$$0_{\mathbb{K}} u_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} u_n = 0_E$$

Par unicité on obtient :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Ceci montre que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E donc c'est une base de E. □

Exemple 10. Dans $E = \mathbb{R}^3$ on pose :

$$\mathcal{B}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \qquad \mathcal{B}_2 = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)) \qquad u = (9,3,7)$$

Alors les deux familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de E.

Quelles sont les coordonnées de u dans ces bases ?

▷ **Exercice 12.**

D. Base canonique

Définition. Soit $E = \mathbb{K}^n$. Pour $i = 1, \dots, n$ on note e_i le vecteur ne contenant que des 0 sauf un 1 en i-ème position :

Alors la famille $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Les coordonnées du vecteur $u = (a_1, \dots, a_n)$ dans cette base sont $(a_1, \dots, a_n)$.

Définition. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$. Alors la famille

est une base de E, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Les coordonnées du polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans cette base sont $(a_0, \dots, a_n)$.

Définition. Soit $E = \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On note E_{ij} la matrice ne contenant que des zéros, sauf un 1 en position (i,j).

La famille $(E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$ est une base de E, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Exemple. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans cette base sont

Remarque. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'ont pas de base canonique.

▷ **Exercices 13, 14.**

E. Dimension

Définition. Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème.

(i) Si un espace vectoriel est de dimension finie alors il admet une base.

(ii) Dans ce cas toutes ses bases ont le même cardinal.

Définition. On appelle dimension de E et on note $\dim E$ le cardinal de ses bases.

Remarque. La démonstration et la suite au chapitre B10 : dimension.

Exemple 11. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies, et :

$\dim \mathbb{K}^n =$ $\dim \mathbb{K}_n[X] =$ $\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) =$

F. Extension aux familles infinies

On note toujours E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition. Soit $\mathcal{E}$ une partie de E. Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Exemple. Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire d'éléments de $\left\{ X^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$.

Définition. Soit $\mathcal{E}$ une partie de E.

On note $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{E}$.

Proposition. *Pour toute partie* $\mathcal{E}$ *de* E *l'ensemble* $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration. La démonstration est identique au cas où la partie $\mathcal{E}$ est finie. On remarque que la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$, car l'union de deux ensembles finis est un ensemble fini. □

Remarques.

(i) Comme pour le cas fini, $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{E}$, ou l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{E}$.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que $\mathcal{E}$ est une partie génératrice de F si $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$.

Notation. Soit I un ensemble infini.

(i) On note $\mathbb{K}^I$ l'ensemble des familles de scalaires indexées par I :

$$\mathbb{K}^I = \{\, (\lambda_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I \quad \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

(ii) On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I, c'est-à-dire des familles dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Remarque. Si $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{K}^I$ alors le support de λ est l'ensemble des indices i pour lesquels λ_i est non-nul. C'est une partie de I.

Ainsi les familles presque nulles sont les familles à support fini.

Exemples.

(i) Dans le cas où $I = \mathbb{N}$: une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.

(ii) On peut définir l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ par :

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \;\middle|\; (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \right\}$$

Définition. Soit $\mathcal{E}$ une partie de E

(i) On dit que $\mathcal{E}$ est libre si toute famille finie d'éléments de $\mathcal{E}$ est libre.

(ii) On dit que $\mathcal{E}$ est liée si elle n'est pas libre, ce qui signifie qu'il existe une famille finie d'éléments de $\mathcal{E}$ linéairement dépendants.

Exemple 12. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $f_a(x) = a^x$.

Démontrer que la famille $\mathcal{A} = \left\{ f_a \;\middle|\; a \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque. Comme dans le cas fini, une base de E est une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ libre et génératrice de E.

Dans le cas où I est infini, tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille, ce qui donne en terme de familles presque nulles :

$$\forall u \in E \qquad \exists!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Les λ_i sont toujours appelés coordonnées de u dans la base $\mathcal{E}$.

Exemple. La famille $\left\{ X^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

V. Sous-espaces affines

On note toujours E un espace vectoriel.

A. Définitions

Définition. Soit a un vecteur de E. La translation de E de vecteur a est l'application :

Propositions.

(i) Pour tous vecteurs a et b de E : $\quad t_a \circ t_b = t_b \circ t_a = t_{a+b}$

(ii) La translation t_a est bijective de réciproque t_{-a}.

Définition. Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme :

où a est un élément de E et F est un sous-espace vectoriel de E.

Remarques.

(i) Ainsi le sous-espace affine $A = a + F$ est l'image du sous-espace vectoriel F par la translation de vecteur a : $\quad A = t_a(F)$

(ii) Tout singleton $\{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé point de E.
L'image d'un point par une translation est un point.
On peut donc additionner un point et un vecteur, la somme est un point :
Si A est un point et $\vec{u}$ est un vecteur alors $B = A + \vec{u}$ est le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
On constate que tout élément de E peut être considéré comme un point ou un vecteur.

Exemple 13.

(i) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Alors la droite A d'équation $y = 2x - 5$ est un sous-espace affine.
En effet on peut poser $F = \text{Vect}\left((1,2)\right)$ et $a = (0,-5)$, alors $A = a + F$.
Plus généralement, les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont les points du plan, les droites du plan, et le plan tout entier.

(ii) De même les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont les points, les droites, les plans et l'espace tout entier.

Proposition. *Soit a et b deux points de E, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
Si $a+F=b+G$ alors $F=G$ et $b-a\in F$.

Remarque. En conséquence le sous-espace vectoriel définissant un sous-espace affine A est uniquement déterminé.

Par contre le point a peut être remplacé par n'importe quel point de A.

Définition. Si $A=a+F$ est un sous-espace affine de E alors on dit que F est la direction de A, ou que A est dirigé par F.

Démonstration.

B. Exemples

Proposition. *Soit S un système linéaire de n équations à p inconnues.*
Soit S_h le système linéaire homogène associé.

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \qquad S_h:\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de S est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$.
Sa direction est l'ensemble des solutions du système homogène S_h.

Exemple 14. Résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 5y - z = 4 \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. Notons F l'ensemble des solutions du système linéaire homogène S_h.

En utilisant la caratérisation on démontre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

En effet F est inclus dans $\mathbb{K}^p$, il contient son vecteur nul, et il est stable par addition et multiplication par un scalaire.

Supposons que $\mathcal{S}$ est non-vide. Il admet alors au moins un élément $x = (x_1, \ldots, x_p)$, qui est solution de S.

Si $y = (y_1, \ldots, y_p)$ est une solution de S_h alors par addition $x + y$ est une solution de S, donc $x + F \subseteq \mathcal{S}$.

Réciproquement, soit $y = (x_1, \ldots, x_p)$ une solution de S.

Par soustraction $y - x = (y_1 - x_1, \ldots, y_p - x_p)$ est solution de S_h, donc appartient à F. Or $y = x + (y - x)$ donc $y \in x + F$, et on en déduit que $\mathcal{S} \subseteq x + F$.

Ainsi $\mathcal{S} = x + F$: $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$. □

Proposition.

(i) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues définies sur I. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' - a(t)y = b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

(ii) Soit a, b, c trois réels, et $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de direction l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

Remarque. Dans les deux cas ci-dessus, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{\, y_1 + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_h \} = y_1 + \mathcal{S}_h$$

où y_1 est une solution particulière de l'équation différentielle et $\mathcal{S}_h$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène, lequel est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C. Intersection de sous-espaces affines

Proposition. *Soit $A = a + F$ et $B = b + G$ deux sous-espaces affines de E, avec a, b points de E et F, G sous-espaces vectoriels de E.*

Alors l'intersection $A \cap B$ est :

- *soit vide*
- *soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.*

Démonstration. Supposons que $A \cap B$ est non-vide. On note c un élément de $A \cap B$. Démontrons qu'alors $A \cap B = c + F \cap G$.

Soit $d \in A \cap B$. Comme $c \in A \cap B$ alors c et d sont deux points de A et de B, donc $d - c \in F$ et $d - c \in G$, puis $d - c \in F \cap G$, et donc $d \in c + F \cap G$.

On a démontré que $A \cap B \subseteq c + F \cap G$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, notons d un élément de $c + F \cap G$.

Alors il existe $w \in F \cap G$ tel que $d = c + w$.

Comme $c \in A$ alors il existe $u \in F$ tel que $c = a + u$. Ainsi $d = a + u + w$, avec $u + w \in F$, donc $d \in A$.

De même on démontre que $d \in B$, donc $d \in A \cap B$.

On en déduit $c + F \cap G \subseteq A \cap B$, et par double inclusion $A \cap B = c + F \cap G$ □

▷ **Exercice 15.**