

Feuille de T. D. B8
Espaces vectoriels

————— Exercices de cours —————

① Les trois ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ F_2 &= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ F_3 &= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

② Soit a un réel et C_a l'ensemble des suites réelles convergeant vers a . Soit :

$$C = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_a.$$

Les ensembles C_a et C sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

③ Démontrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels.

④ Soit $E = \mathbb{R}^5$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où :

$$u_1 = (0, 1, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, 1, 1, 1, 1).$$

Les vecteurs $v_1 = (5, 3, 5, 5, 5)$

$$v_2 = (2, 2, 1, 1, 2)$$

$$v_3 = (-5, -5, -5, -5, -5)$$

sont-ils éléments de F ?

⑤ Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité $F = F + G$.

⑥ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$.

Cette somme est-elle directe ?

⑦ Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit F l'ensemble des fonctions paires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , G l'ensemble des fonctions impaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

b. Démontrer que F et G sont supplémentaires.
(Raisoner par analyse-synthèse.)

⑧ Donner une famille génératrice de :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 5t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = z + 3t = 0\}$$

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5y - 4z = 0\}.$$

⑨ Les familles suivantes de \mathbb{R}^3 sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = ((3, 2, 1), (1, 1, 1), (6, 3, 1))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((4, 3, 1), (1, 2, 4), (6, 5, 3)).$$

⑩ Les familles suivantes de $\mathbb{K}[X]$ sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = (2 + X^2, -2 - X + X^2, 3X)$$

$$\mathcal{F}_2 = (1 + X^2, 2 + X + X^2, 1 + X)$$

$$\mathcal{F}_3 = (1, (X - 3), (X - 4)^2)$$

$$\mathcal{F}_4 = ((X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 3), (X - 2)(X - 3)).$$

⑪ Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et f_1, f_2, f_3 les trois éléments de E définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \cos x$$

$$f_2(x) = \sin x$$

$$f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

⑫ Soit : $E = \mathbb{R}^2$ $u_1 = (2, 1)$ $u_2 = (1, 2)$

a. Démontrer que (u_1, u_2) est une base de E .

b. Calculer les coordonnées dans cette base des vecteurs $v = (13, 11)$ et $w = (-5, 1)$.

⑬ Soit $E = \mathbb{R}^4$. On note \mathcal{B} la famille des vecteurs :

$$u_1 = (2, 1, 0, 0) \quad u_2 = (0, 0, 0, 1)$$

$$u_3 = (1, 0, 1, 1) \quad u_4 = (0, 0, 1, 0).$$

a. Démontrer que la famille \mathcal{B} est libre.

b. Exprimer les quatre vecteurs de la base canonique de E en fonction des u_i .

c. En déduire que la famille \mathcal{B} est génératrice de E .

d. Déterminer les coordonnées dans cette base des vecteurs :

$$v_1 = (8, 2, 4, 4) \quad \text{et} \quad v_2 = (-1, -2, 1, 8)$$

⑭ On considère la famille :

$$\mathcal{B} = (3, 2 - X, 1 + 2X + X^2).$$

a. Démontrer que $1, X$ et X^2 sont combinaisons linéaires des éléments de \mathcal{B} .

b. En déduire que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

c. Donner les coordonnées dans cette base du polynôme $2 + 2X + 2X^2$.

⑮ Soit $E = \mathbb{R}^3$, A et B les plans d'équations respectives :

$$2x + y - 5z = 3 \quad \text{et} \quad x + 2y + z = 7.$$

a. Donner un point et la direction de A et de B .

b. Décrire de même $A \cap B$.

Travaux dirigés

1 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \\ F_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} \\ F_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\} \\ F_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \\ F_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\} \\ F_6 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\} \\ F_7 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - \pi y = 0\} \\ F_8 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\} \\ F_9 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\} \\ F_{10} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}. \end{aligned}$$

2 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

F_1 : ensemble des suites strictement croissantes
 F_2 : ensemble des suites croissantes
 F_3 : ensemble des suites monotones
 F_4 : ensemble des suites bornées
 F_5 : ensemble des suites périodiques
 F_6 : ensemble des suites convergentes
 F_7 : ensemble des suites divergentes ou nulles
 F_8 : ensemble des suites arithmétiques
 F_9 : ensemble des suites géométriques.

3 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

F_1 : ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
 F_2 : ensemble des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
 $F_3 = \mathcal{C}^4([1, 8], \mathbb{R})$
 F_4 : ensemble des fonctions 2π -périodiques
 F_5 : ensemble des fonctions périodiques.

4 Soit E un espace vectoriel, F , G et H trois sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que :

- $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$
- $F + (G \cap H) \subseteq (F + G) \cap (F + H)$
- Les inclusions ci-dessus sont en général strictes.

5 Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

6 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par :

$$u_1 = (1, -3, 5, 2) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, -1, -4, 3).$$

- Le vecteur $v = (2, -10, 26, 2)$ est-il élément de F ?
- Soit G l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de F tels que $y = 0$. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E .

7 On définit dans \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, 0, 0) & u_2 &= (1, 0, 2, -2) \\ v_1 &= (1, 1, 1, -1) & v_2 &= (0, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Démontrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

8 Même question dans \mathbb{R}^3 avec :

$$\begin{aligned} u_1 &= (2, 2, -1) & u_2 &= (5, 7, -5) \\ v_1 &= (3, 1, 1) & v_2 &= (7, 5, -1). \end{aligned}$$

9 Soit $E = \mathbb{R}^3$ puis :

F l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x = y$,

G l'ensemble des triplets tels que $y = z$.

- Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Démontrer que $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sont éléments de $F + G$.
En déduire que $E = F + G$.
- Cette somme est-elle directe ?

10 On définit les vecteurs suivants de $E = \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, 0) & u_2 &= (1, 1, 0, 0) \\ v_1 &= (1, 1, 1, 0) & v_2 &= (1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

On pose ensuite :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(v_1, v_2).$$

Démontrer que $E = F \oplus G$.

11 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

- $E = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
 $F = \text{Vect}(u_0)$ où $u_0 = (1, 1, \dots, 1)$
 $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, F et G les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de E .
- $E = \mathbb{R}_1[X]$
 $F = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$
 $G = \{P \in E \mid P(3) = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$, G l'ensemble des fonctions constantes.

12 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et :

$$G = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}.$$

- Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Démontrer que F et G sont en somme directe.
- En utilisant la formule de Taylor ou la division euclidienne, démontrer que $E = F + G$.
- Donner la décomposition de X^3 , X^2 , X et 1 dans cette somme directe.

13 Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ on pose :

$$E_a = \{P \in E \mid P(a) = 0\}.$$

- Justifier que pour tout $a \in \mathbb{K}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E .
- Démontrer que si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$.
- Cette somme est-elle directe ?

14 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} , F l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$ et $G = \text{Vect}_E(\cos, \sin)$.

- Démontrer que E est un espace vectoriel et que F et G en sont deux sous-espaces vectoriels.
- Démontrer que pour tout $f \in E$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f - \alpha \cos - \beta \sin \in F$.
- Démontrer que $E = F \oplus G$.

15 Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1)) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \ (a \in \mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1, 6, 5), (7, 2, 5), (9, 2, 6)) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1, 3, 4), (4, 9, 8), (16, 27, 16)) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{F}_5 = ((2, 1, -1, -2), (6, 4, 4, 6), (0, 1, 7, 12)) \text{ dans } \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{F}_6 = (u_i = (3, \dots, 3, \underset{(i)}{1}, 3, \dots, 3) \mid i = 1 \dots n) \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Démontrer que les familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_6 sont génératrices.

16 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x + y + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - z - 3t = 0\}.$$

- Donner la dimension de F , G , puis $F \cap G$.
- Déterminer $F + G$.

17 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et :

$$F = \text{Vect}((1, 3, 1, 2), (2, 4, 2, 3))$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + t = y + z\}.$$

Donner la dimension de F , G , $F \cap G$, puis $F + G$.

18 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$$

$$G = \{P \in E \mid P(3) = P(4) = 0\}.$$

- Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun d'entre eux.
- Démontrer que F et G sont supplémentaires.

19 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 15u_n.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

- Même question avec les suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n.$$

20 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et F le sous-ensemble de E contenant les suites arithmétiques.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

21 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} deux fois dérivables.

- Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

- Même question avec l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non-nul fixé.

22 Démontrer que l'ensemble des fonctions sinusoïdales de période 2π :

$f : x \mapsto A \sin(x + \varphi) + K$ avec $(A, \varphi, K) \in \mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.

23 Soit α un scalaire.

- Démontrer que la famille $((X - \alpha)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.
- Démontrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}[X]$, et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque P dans cette base.

24 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit la fonction :

$$f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1+x^\alpha}$$

- Démontrer que la partie $\mathcal{E} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est liée.
- Démontrer que la partie $\mathcal{F} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ est libre.
- La partie \mathcal{F} est-elle génératrice ?

25 Soit $E = \mathbb{R}^4$, et :

$$A = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - 2t = 2\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - 2z + 3t = 3\}$$

$$C = A \cap B.$$

Justifier que A , B , C sont des sous-espaces affines de E . Donner un point et la direction de chacun d'entre eux.

26 Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et :

$$A = \left\{ P \in E \mid \begin{array}{l} P(1) = P'(0) = 0 \\ P(0) = P'(1) = 1 \end{array} \right\}.$$

- Déterminer un polynôme P_0 de degré minimal appartenant à A .
- Décrire l'ensemble $\{P - P_0 \mid P \in A\}$.
- En déduire que A est un sous-espace affine de E et décrire ses éléments.