Devoir à la Maison n°10

Exercice 1.

Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ et $P = X^3 + pX + q$.

On appelle *discriminant* de P le scalaire $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

Le but de cet exercice est de démontrer que P admet une racine double si et seulement si son discriminant est nul.

Une racine double est une racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 2.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par P'.
2. On suppose que p est non-nul.
   (a) Déduire de la question précédente que $\alpha = -\frac{3q}{2p}$ est la seule racine double possible de P.
   (b) Démontrer que P admet une racine double si et seulement si $\Delta = 0$.
3. Démontrer que ce résultat est également vrai dans le cas où $p = 0$.

Exercice 2.

Soit P un polynôme de degré 2022 tel que pour tout $k \in \{1, \dots, 2023\}$: $\quad P(k) = \frac{1}{k}$.

Calculer $P(2024)$.

On étudiera le polynôme $Q = XP - 1$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe C^1.

1. Démontrer que f' est périodique.
2. Démontrer que f' s'annule en un nombre infini de points.
3. Démontrer que f est lipschitzienne.
4. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe α_n tel que $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$.

Exercice 4.

Soit P un polynôme scindé non-nul de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ses racines, rangées dans l'ordre strictement croissant.

1. Démontrer qu'il existe des racines $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ de P' telles que :

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \alpha_k.$$

2. Démontrer que P' est scindé.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Soit A l'ensemble des points fixes de f :

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \ f(x) = x \}.$$

1. Démontrer que f est continue.
2. Démontrer que A est un intervalle.
3. On suppose que A est non-vide et borné. Démontrer que A est un segment.

Indications.

Exercice 2.

Déterminer le degré de Q puis ses racines, et enfin son coefficient dominant.

Exercice 4.

Raisonner sur l'ordre de multiplicité des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Exercice 5.

2. Utiliser la définition d'un intervalle.
3. Justifier que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.
   Justifier qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers $a = \operatorname{Inf} A$.