Chapitre B9
Applications linéaires

On note
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

I. Généralités

A. Définition

Définitions. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire :

Un endomorphisme est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même.

Proposition (Caractérisation d'une application linéaire).
Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si

Contre-exemples.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Remarque. Si $f : E \to F$ est linéaire alors

$f(0_E) =$ $\qquad$ $\forall u \in E \quad f(-u) =$

Exemple 1. Les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaires sont de la forme $f(x) = ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exemples et définitions.

Les applications suivantes sont linéaires.

(i) Identité de E
$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array}$$

(ii) Application nulle de E dans F
$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F \end{array}$$

(iii) Homothétie de E de rapport α
$$h_\alpha : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \alpha u \end{array} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{K}$$

(iv) Dérivation
$$D : \begin{array}{rcl} \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

(v) Spécialisation en α
$$f_\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{array} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{K}$$

B. Opérations sur les applications linéaires

Notations. Pour tous espaces vectoriels E et F on note :

L'ensemble des applications linéaires de E dans F :

L'ensemble des endomorphismes de E :

Rappel. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ et λ un scalaire. Alors les applications de E dans F notées $(f+g)$ et λf sont définies par :
$$\forall u \in E \qquad (f+g)(u) = f(u) + g(u)$$
$$(\lambda f)(u) = \lambda\, f(u)$$

Proposition. *Les applications $(f+g)$ et λf sont linéaires.*

Proposition. *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ muni des opérations rappelées ci-dessus est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Son élément nul $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ est l'application nulle de E dans F.*

Proposition. *Soit E, F et G trois espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est linéaire.*

Démonstration.

Proposition. *Soit E, F et G trois espaces vectoriels. L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

est bilinéaire.

Ceci signifie qu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \text{l'application} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array} \quad \text{est linéaire}$$

$$\forall g \in \mathcal{L}(F,G) \qquad \text{l'application} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array} \quad \text{est linéaire}$$

On peut écrire ceci :

$$\begin{array}{l} \forall (f,f_1,f_2) \in \mathcal{L}(E,F)^3 \\ \forall (g,g_1,g_2) \in \mathcal{L}(F,G)^3 \end{array} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \begin{cases} g \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda (g \circ f_1) + g \circ f_2 \\ (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda (g_1 \circ f) + g_2 \circ f \end{cases}$$

Démonstration. La première linéarité est conséquence de la linéarité de g. La seconde est conséquence de la définition de l'application $\lambda g_1 + g_2$. □

Remarque. Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est donc un anneau. Il n'est pas commutatif en général.
L'élément neutre pour la loi $\circ$ est Id_E, noté aussi id_{E} ou id.
On note couramment gf, f^2, f^k etc au lieu de $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ \cdots \circ f$ etc.

C. Isomorphismes

Définition. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme, alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire (c'est donc également un isomorphisme).*

Démonstration.

Proposition. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux isomorphismes alors $g \circ f$ est un isomorphisme, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Définition. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif, ou de façon équivalente un isomorphisme d'un espace vectoriel dans lui-même.

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé groupe linéaire de E.

Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe. C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

D. Applications linéaires et somme directe

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction de f à E_1, notée $f_{|E_1}$, est une application linéaire de E_1 dans F.*

De plus l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, F)$ qui à f associe sa restriction à E_1 est linéaire.

Démonstration. Soit $(u, v) \in E_1^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $\lambda u + v \in E_1$ car E_1 est un sous-espace vectoriel de E, et :

$$\begin{aligned} f_{|E_1}(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) && \text{par définition de la restriction} \\ &= \lambda f(u) + f(v) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda f_{|E_1}(u) + f_{|E_1}(v) && \text{car } u \text{ et } v \text{ appartiennent à } E_1. \end{aligned}$$

Ceci montre que $f_{|E_1}$ est linéaire.

De plus si f et g sont deux applications linéaires de E dans F et λ est un scalaire alors :

$$\forall u \in E_1 \quad (\lambda f + g)_{|E_1}(u) = (\lambda f + g)(u) = \lambda f(u) + g(u) = \lambda f_{|E_1}(u) + g_{|E_1}(u)$$

Ceci montre que $(\lambda f + g)_{|E_1} = \lambda f_{|E_1} + g_{|E_1}$, donc l'application de restriction $f \mapsto f_{|E_1}$ est bien linéaire. □

Théorème. *Soit E et F deux espace vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit $f_1 : E_1 \to F$ et $f_2 : E_2 \to F$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.*

Remarque. On retient que si E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E alors une application linéaire de E est uniquement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Démonstration. Si une telle application existe, alors :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad f(u_1) = f_1(u_1) \qquad \text{et} \qquad \forall u_2 \in E_2 \quad f(u_2) = f_2(u_2)$$

Comme f est linéaire alors :

$$\forall (u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 \qquad f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

Ceci définit une application de E dans F car tout élément u de E s'écrit de façon unique comme somme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$, puisque $E_1 \oplus E_2 = E$.

Démontrons qu'elle est linéaire.

Soit $(u, v) \in E$. On note $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec u_1 et u_2 éléments de E_1, et v_1, v_2 éléments de E_2. Soit également λ un scalaire.

Comme E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels alors $\lambda u_1 + u_2$ est élément de E_1 et $\lambda v_1 + v_2$ est élément de E_2. De plus :

$$f(\lambda u + v) = f((\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)) = f_1(\lambda u_1 + v_1) + f_2(\lambda u_2 + v_2)$$

Comme f_1 et f_2 sont linéaires alors :

$$f(\lambda u + v) = \lambda f_1(u_1) + f_1(v_1) + \lambda f_2(u_2) + f_2(v_2) = \lambda f(u) + f(v)$$

La fonction f est donc bien linéaire. Elle est uniquement déterminée par la formule $f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ d'après le début de cette démonstration, donc la propriété est démontrée. □

II. Image et noyau

A. Définitions

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(i) Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) Si F_1 est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Exemples.

$f(\{0_E\}) =$ $f^{-1}(F) =$

Ce sont bien des sous-espaces vectoriels respectivement de F et de E.

Définitions. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

On appelle image de f et on note $\operatorname{im} f$ l'ensemble :

On appelle noyau de f et on note $\ker f$ l'ensemble :

B. Propriétés

Proposition. *L'image de f est un sous-espace vectoriel de F, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque. Caractérisation des éléments de l'image et du noyau :

Exemple 2. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y - z, 2x - z) \end{array}$

Démontrer que f est linéaire, calculer son noyau et son image.

▷ **Exercices 1, 2.**

Exemple 3. Soit A une matrice fixée de taille (n, p). L'application suivante est linéaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Ceci est conséquence de la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition.

Le noyau de cette application est l'ensemble des matrices colonnes à p lignes X telles que $AX = 0_{n1}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, ceci en identifiant $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ grâce à l'isomorphisme évident $\mathbb{K}^p \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$.

Exemple 4. L'application suivante est bien définie et linéaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y'' + 5y' - 6y \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. En effet, c'est le noyau de f.

Théorème. *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire. Alors :*

(i) f *est injective si et seulement si* $\ker f = \{0_E\}$.

(ii) f *est surjective si et seulement si* $\operatorname{im} f = F$.

▷ **Exercice 3.**

Démonstration.

C. Application : systèmes et équations différentielles linéaires

Propositions.

(i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p *inconnues est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$.

(ii) Soit I *un intervalle, et* $a : I \to \mathbb{K}$ *une fonction continue.*
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

$$y' - a(t)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

(iii) Soit a, b, c *trois scalaires.*
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Démonstration.

(i) Soit S un système linéaire homogène de n lignes à p colonnes. Soit A la matrice qui lui est associée. Alors la représentation matricielle de ce système est $AX = 0$, où 0 est la matrice colonne nulle à n lignes.

L'application $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ est linéaire. En effet :

$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$f(\lambda X_1 + X_2) = A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda A X_1 + A X_2 = \lambda f(X_1) + f(X_2).$$

Donc le noyau de f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

L'application

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_p : & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ & (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme (dit *canonique*).

L'ensemble des solutions du système linéaire S est $\varphi_p^{-1}(\ker f)$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, car image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

(ii) L'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ y & \longmapsto & y' - a(t)y \end{array}$$

est linéaire car elle est combinaison linéaire de l'application de dérivation $y \mapsto y'$ et de l'homothétie $y \mapsto a(t)y$, qui sont linéaires.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ est le noyau de cette application, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

(iii) L'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ y & \longmapsto & ay'' + by' + cy \end{array}$$

est linéaire car elle est combinaison linéaire des applications $y \mapsto y''$, $y \mapsto y'$ et $y \mapsto y$, qui sont linéaires. En effet la dérivation seconde est composée deux fois de l'application de dérivation.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est le noyau de cette application, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. □

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et b un élément de F. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ d'inconnue $u \in E$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction* $\ker f$.

Remarques. Une équation de la forme $f(u) = b$ est appelée équation linéaire.

La proposition ci-dessus donne en particulier les résultats suivants :

(i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du système homogène associé.

(ii) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est non-vide. Il contient alors un vecteur u_1 de E.

Pour tout autre vecteur u de E on peut écrire :

$$\begin{array}{rcll} f(u) = b & \iff & f(u) = f(u_1) & \\ & \iff & f(u) - f(u_1) = 0_F & \\ & \iff & f(u - u_1) = 0_F & \text{car } f \text{ est linéaire} \\ & \iff & u - u_1 \in \ker f & \\ & \iff & u \in u_1 + \ker f & \end{array}$$

Ceci montre que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ d'inconnue $u \in E$ est l'ensemble $u_1 + \ker f$, qui est bien un sous-espace affine de E dirigé par $\ker f$. □

III. Formes linéaires

A. Définition et exemples

Définition. Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 5.

(i) Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - 2y + 5z \end{array}$

Alors f est linéaire.

(ii) Spécialisation d'un polynôme, d'une fonction, ou d'une suite :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(5) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n) & \longmapsto & u_6 \end{array}$$

(iii) Par composition l'application suivante est une forme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f'(2) \end{array}$$

Proposition. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout $i = 1, \dots, n$ l'application qui à un vecteur de E associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ est une forme linéaire :*

Définition. Ces formes linéaires sont appelées formes coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ et notées $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Exemple. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Les formes linéaires coordonnées selon la base canonique de $\mathbb{K}^p$ sont, pour tout $i = 1, \dots, p$:

$$e_i^* : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Démonstration. Soit u et v deux vecteurs de E, de coordonnées respectives $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit α un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha u + v &= \alpha(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) + (\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n) \\ &= (\alpha\lambda_1 + \mu_1)e_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \mu_n)e_n \end{aligned}$$

Ceci montre que les coordonnées de $\alpha u + v$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\alpha\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \alpha\lambda_n + \mu_n)$, et donc :

$$e_i^*(\alpha u + v) = \alpha\lambda_i + \mu_i = \alpha e_i^*(u) + e_i^*(v)$$

L'application e_i^* est linéaire. Comme ses valeurs sont des scalaires elle est bien une forme linéaire. □

Proposition. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Toute forme linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ est de la forme :*

$$f : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p$$

où $a_1, \ldots, a_p$ sont des scalaires.

Remarque. On constate que f est l'application $a_1 e_1^* + \cdots + a_p e_p^*$.
Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire donc f est une forme linéaire.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On note $a_i = f(e_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Les a_i sont donc des scalaires.

Soit u un vecteur de $\mathbb{K}^p$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_p)$ dans la base canonique :

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$$

Par linéarité :

$$f(u) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_p f(e_p) = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p$$

Ceci est bien le résultat annoncé. □

B. Applications à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{K}^n$ une application. Pour tout $u \in E$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$ on note $f_i(u)$ la composante d'indice i de $f(u)$, *i.e.*, $f_i(u)$ est un scalaire et :

$$\forall u \in E \qquad f(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u))$$

L'application $f_i : E \to \mathbb{K}$ est appelée composante de f d'indice i.

Proposition. *Une application $f : E \to \mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si toutes ses composantes f_i sont linéaires. (Ce sont alors des formes linéaires.)*

Exemple. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (4x + 3y, x - 5y)$$

admet pour composantes :

Ces deux applications sont des formes linéaires car elles sont de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$, donc par propriété f est linéaire.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors les f_i sont les composées $e_i^* \circ f$. On sait que les e_i^* sont linéaires. Par composition, si f est linéaire alors les f_i sont linéaires.

Réciproquement, supposons que les f_i sont linéaires.

Soit u et v deux vecteurs de E et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (f_1(\lambda u + v), \ldots, f_n(\lambda u + v)) \\ &= (\lambda f_1(u) + f_1(v), \ldots, \lambda f_n(u) + f_n(v)) \qquad \text{par linéarité des } f_i \\ &= \lambda(f_1(u), \ldots, f_n(u)) + (f_1(v), \ldots, f_n(v)) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ceci montre que f est linéaire. □

Remarque. Les deux propositions précédentes montrent que toute application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ (où p et n sont deux entiers naturels non-nuls) est de la forme :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p)$$

où les a_{ij} pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$ sont des scalaires.
Ceci correspond à la multiplication matricielle à gauche :

$$\begin{aligned} m_A : \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

où A est la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, de taille (n, p).
Plus précisément, si on note φ_n l'isomorphisme canonique de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, qui à un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ associe la matrice colonne contenant les x_i, alors $f = \varphi_n^{-1} \circ m_A \circ \varphi_p$.
Nous avons démontré que toute application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est donnée par une matrice de taille (n, p).

C. Droites et hyperplans

Définition. Une droite vectorielle est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non-nul.

Remarque. Si u_0 est un vecteur non-nul d'une droite vectorielle D, alors il engendre D : $D = \text{Vect}\,(u_0)$.

Exemple. Toute droite de $\mathbb{K}^p$ est de la forme :

$$D = \{\, (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_p) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où $u = (a_1, \ldots, a_p)$ est un vecteur non-nul de $\mathbb{K}^p$.

Définition. Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E.

Remarque. Soit H un hyperplan de E. Alors il existe $\varphi : E \to \mathbb{K}$ linéaire telle que $H = \ker \varphi$. En particulier H est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple. Un hyperplan de $\mathbb{K}^p$ est un ensemble d'équation :

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$$

où les a_i sont des scalaires non tous nuls.
Si $p = 2$ il s'agit d'une droite vectorielle, si $p = 3$ il s'agit d'un plan vectoriel.

Proposition. *Soit H un hyperplan de E.*
Alors il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E.
Plus généralement toute droite vectorielle non contenue dans H est supplémentaire de H dans E : Si $D \not\subseteq H$ alors $E = H \oplus D$.

<u>Démonstration</u>. Comme H est un hyperplan de E alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ non-nulle dont H est le noyau.

Comme φ est non-nulle alors il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Posons $D = \text{Vect}\,(u_0)$. Comme $\varphi(u_0)$ est non-nul alors u_0 est non-nul, et donc D est une droite vectorielle.

Démontrons que H et D sont supplémentaires dans E.

Les points *(i)* et *(ii)* montrent que H et D sont supplémentaires dans E : $E = H \oplus D$

Si maintenant D est une droite vectorielle non incluse dans H alors elle contient un vecteur u_0 n'appartenant pas H, donc tel que $\varphi(u_0) \neq 0$. On peut donc appliquer ce qui précède : H et D sont supplémentaires dans E. $\square$

Proposition. *Soit D une droite vectorielle de E. Alors tout supplémentaire de D dans E est un hyperplan de E.*

Démonstration. Soit H un supplémentaire de D dans E.

Comme D est une droite vectorielle alors elle est engendrée par un vecteur non-nul u_0. Celui-ci forme une base de D. La forme coordonnée u_0^* est alors une forme linéaire de D dans $\mathbb{K}$, qui au vecteur $u = \lambda u_0$ associe λ.

Notons $\varphi_1 : D \to \mathbb{K}$ cette application linéaire, et $\varphi_2 : H \to \mathbb{K}$ l'application nulle de H dans $\mathbb{K}$.

Comme $E = D \oplus H$ alors il existe une et une seule application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ dont la restriction à D est φ_1 et la restriction à H est φ_2.

Soit u un élément de E. Alors u se décompose dans la somme $E = D \oplus H$ en somme $u = \lambda u_0 + v$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in H$. Par définition de φ : $\varphi(u) = \varphi_1(\lambda u_0) + \varphi_2(v) = \lambda$

Ceci montre que $\varphi(u)$ est nul si et seulement si $\lambda = 0$, donc si et seulement si $u \in H$. Ainsi $H = \ker \varphi$.

Or φ est une forme linéaire, non-nulle car $\varphi(u_0) = 1$, donc H est un hyperplan. □

Proposition. *Soit φ et ψ deux formes linéaires. Si* $\ker \varphi = \ker \psi$ *alors φ et ψ sont proportionnelles,* i.e., *il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.*

Remarque. Ainsi, pour tout hyperplan H de E, les formes linéaires dont H est le noyau sont proportionnelles.
Par exemple si un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admet pour équation $ax + by + cz = 0$, alors ses équations sont toutes de la forme $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = 0$ avec $\lambda \neq 0$.

Démonstration. Si φ est nulle alors son noyau est E tout entier. Comme $\ker \varphi = \ker \psi$ alors ψ est nulle également, donc φ et ψ sont proportionnelles.

Supposons que φ est non-nulle. Alors $\ker \varphi$ est un hyperplan que l'on note H.

Il admet une droite vectorielle supplémentaire D, engendrée par un vecteur u_0 non-nul.

Alors $\varphi(u_0) \neq 0$, et comme $\ker \varphi = \ker \psi$ alors $\psi(u_0) \neq 0$. On peut donc définir $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$.

Ainsi λ est bien défini, c'est un scalaire non-nul. On pose ensuite $f = \psi - \lambda\varphi$.

Par combinaison linéaire f est une forme linéaire. Montrons qu'elle est nulle.

Soit v un élément de H. Alors v est dans le noyau de φ et de ψ, donc :

$$f(v) = \psi(v) - \lambda\varphi(v) = 0$$

Soit w est un élément de D. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $w = \alpha u_0$, donc :

$$f(w) = \alpha f(u_0) = \alpha(\psi(u_0) - \lambda\varphi(u_0)) = 0 \qquad \text{car} \qquad \lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$$

Ainsi f est nulle sur H et D, avec H et D supplémentaires dans E. Une application linéaire sur $E = H \oplus D$ est uniquement déterminée par ses restrictions à H et D, donc f est l'application nulle de E dans $\mathbb{K}$.

Ceci montre que $\psi = \lambda\varphi$. Or λ est non-nul, donc ψ et φ sont proportionnelles. □

IV. Projecteurs et symétries

A. Projecteurs

Définition. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $u \in E$ il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$. On appelle projecteur de E sur F parallèlement à G l'application de E dans E qui à u associe v.

Proposition. *Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G. Alors*

(i) *p est un endomorphisme de E*

(ii) $\operatorname{im} p = F$ *et* $\ker p = G$.

Démonstration.

(i) Comme $E = F \oplus G$ alors un endomorphisme de E est uniquement déterminé par ses restrictions à F et à G.

Le projecteur de E sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E vérifiant $p_{|F}(u) = u$ pour tout $u \in F$ et $p_{|G}(u) = 0_E$ pour tout $u \in G$. C'est donc un endomorphisme.

(ii) Soit $u \in E$. On note $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Alors $p(u) = v$, donc $p(u)$ est élément de F. Ceci montre que $\operatorname{im} p \subseteq F$.

Réciproquement, si v est un élément de F, alors *a fortiori* v est élément de E et sa décomposition selon la somme directe $E = F \oplus G$ est $v = v + 0_E$. Ceci montre que $p(v) = v$, puis que $v \in \operatorname{im} p$. Ainsi $F \subseteq \operatorname{im} p$, et $\operatorname{im} p = F$ par double inclusion.

Si $p(u) = 0_E$ alors $u = w$, donc $u \in G$. Ceci montre que $\ker p \subseteq G$.

Réciproquement, si w est élément de G alors *a fortiori* w est élément de E et sa décomposition selon la somme directe $E = F \oplus G$ est $w = 0_E + w$. Ceci montre que $p(w) = 0_E$, puis que $w \in \ker p$. Ainsi $G \subseteq \ker p$, et $\ker p = G$ par double inclusion. □

Remarque. On a démontré également que : $\forall v \in F \quad p(v) = v$

Théorème. *Soit p un endomorphisme de E. Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas p est le projecteur sur $\operatorname{im} p$ parallèlement à $\ker p$.*

Lemme. *Soit p un endomorphisme de E. Soit F son image et G son noyau.*
Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

Démonstration.

Démonstration du théorème. Supposons que p est le projecteur sur F parallèlement à G. D'après la proposition précédente $\operatorname{im} p = F$ et $\ker p = G$. Démontrons que $p \circ p = p$.

Soit $u \in E$ et v, w ses composantes selon la somme directe $E = F \oplus G$: $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

Alors $p(u) = v$, donc $p \circ p(u) = p(v)$. Comme $v \in F$ alors d'après la remarque ci-dessus $p(v) = v$ et donc :

$$p \circ p(u) = v = p(u)$$

Ceci est valable pour tout $u \in E$ donc $p \circ p = p$.

Réciproquement, supposons que p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. Posons $F = \operatorname{im} p$ et $G = \ker p$.

D'après le lemme F et G sont supplémentaires.

De plus, si u est élément de E alors $u = p(u) + u - p(u)$, avec $p(u) \in F$ et $u - p(u) \in G$, donc $p(u)$ est bien l'image de u par le projecteur de E sur F parallèlement à G. □

▷ **Exercices 4, 5.**

B. Symétries

Définition. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $u \in E$ il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$. On appelle symétrie de E par rapport à F parallèlement à G l'application de E dans E qui à u associe $v - w$.

Proposition. *Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G. Alors*

Démonstration. Il suffit d'écrire, pour tout $u \in E$:

$$2p(u) - u = 2v - (v + w) = v - w = s(u)$$

□

Proposition. *Soit s la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G. Alors*

(i) s *est un endomorphisme de* E.

(ii) $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ *et* $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$.

Démonstration. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G. Alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

(i) Comme p et Id_E sont des endomorphismes de E alors par combinaison linéaire s est un endomorphisme de E.

(ii) On sait que p est un projecteur et $F = \operatorname{im} p$, donc $F = \{u \in E \mid p(u) = u\}$

Par équivalences, pour tout $u \in E$:

$$s(u) = u \iff 2p(u) - u = u \iff p(u) = u \iff u \in F$$

De même $G = \ker p = \{u \in E \mid p(u) = 0\}$. Par équivalences, pour tout $u \in E$:

$$s(u) = -u \iff 2p(u) - u = -u \iff p(u) = 0 \iff u \in G$$

Ceci montre que $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ et $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$. □

Théorème. *Soit s un endomorphisme de E. Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, où $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ et $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$.*

Démonstration. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors pour tout $u \in E$, si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ alors :

$$s \circ s(u) = s(v - w) = v - (-w) = u$$

Ceci montre que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Réciproquement, supposons que s est un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Posons $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$. On calcule alors :

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \mathrm{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E) = p$$

D'après le théorème de caractérisation des projecteurs, p est le projecteur de E sur $F = \operatorname{im} p$ parallèlement à $G = \ker p$. Comme $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, alors s est la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G. □

Remarque. Une symétrie est bijective, égale à sa propre réciproque.

▷ **Exercice 6.**