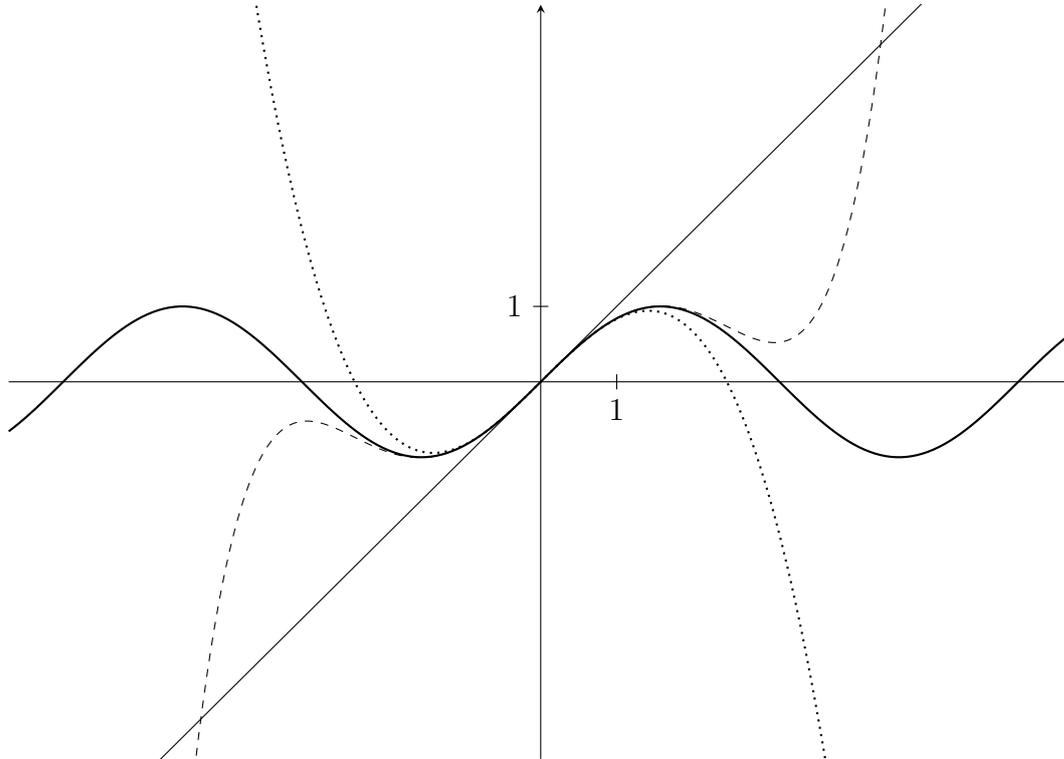


FIGURE 1 – La fonction sinus et ses premiers développements limités.



(iii) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de développement limité en 0 à l'ordre 1.



B. Propriétés

Proposition. Une fonction f admet un développement limité à l'ordre $n = 0$ en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0. Cette limite est alors c_0 .

Démonstration. La fonction f admet un développement limité en 0 si et seulement si il existe un réel c_0 tel que $f(x) = c_0 + \varepsilon(x)$, où ε est une fonction admettant 0 pour limite en 0. Ceci équivaut à $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c_0$, donc f admet une limite finie en 0. \square

Propositions. Supposons que f est définie en 0.

- (i) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si et seulement si elle est continue en 0. Si c'est le cas alors $c_0 = f(0)$.
- (ii) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 si et seulement si elle est dérivable en 0. Si c'est le cas alors $c_1 = f'(0)$.

Remarque. Ceci ne se généralise pas aux ordres supérieurs.

Par exemple l'existence d'un développement limité à l'ordre 2 n'implique pas la dérivabilité seconde de f .

▷ **Exercice 1.**

Démonstration.

- (i) D'après la propriété précédente, la fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c_0$.

Si f est définie en 0 ceci revient à la continuité de f en 0 avec $f(0) = c_0$.

- (ii) Supposons que f admet un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(x) = c_0 + c_1x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Alors $f(0) = c_0$, et

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = c_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} c_1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = c_1$.

Réciproquement supposons que f est dérivable en 0 et posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - f'(0)$.

Alors $\varepsilon \xrightarrow{0} 0$ et $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$, ce qui montre bien que f admet un développement limité en 0 à l'ordre 1. \square

Proposition (Troncature d'un développement limité). Supposons que f admet en 0 le développement limité suivant :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit k un entier k tel que $0 \leq k \leq n$. Alors f admet en 0 le développement limité suivant à l'ordre k :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k + x^k\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Démonstration. On écrit :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k + x^k(c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \cdots + c_nx^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)).$$

Soit $\varepsilon_2(x) = c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \cdots + c_nx^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$, donc f admet bien un développement limité en 0 à l'ordre k , celui-ci est la restriction du développement limité à l'ordre n . \square

Définition. Soit f une fonction admettant un développement limité en 0. Soit p l'indice du plus petit coefficient non-nul de ce développement limité. On peut alors écrire

$$f(x) \underset{(0)}{=} x^p(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + o(x^m))$$

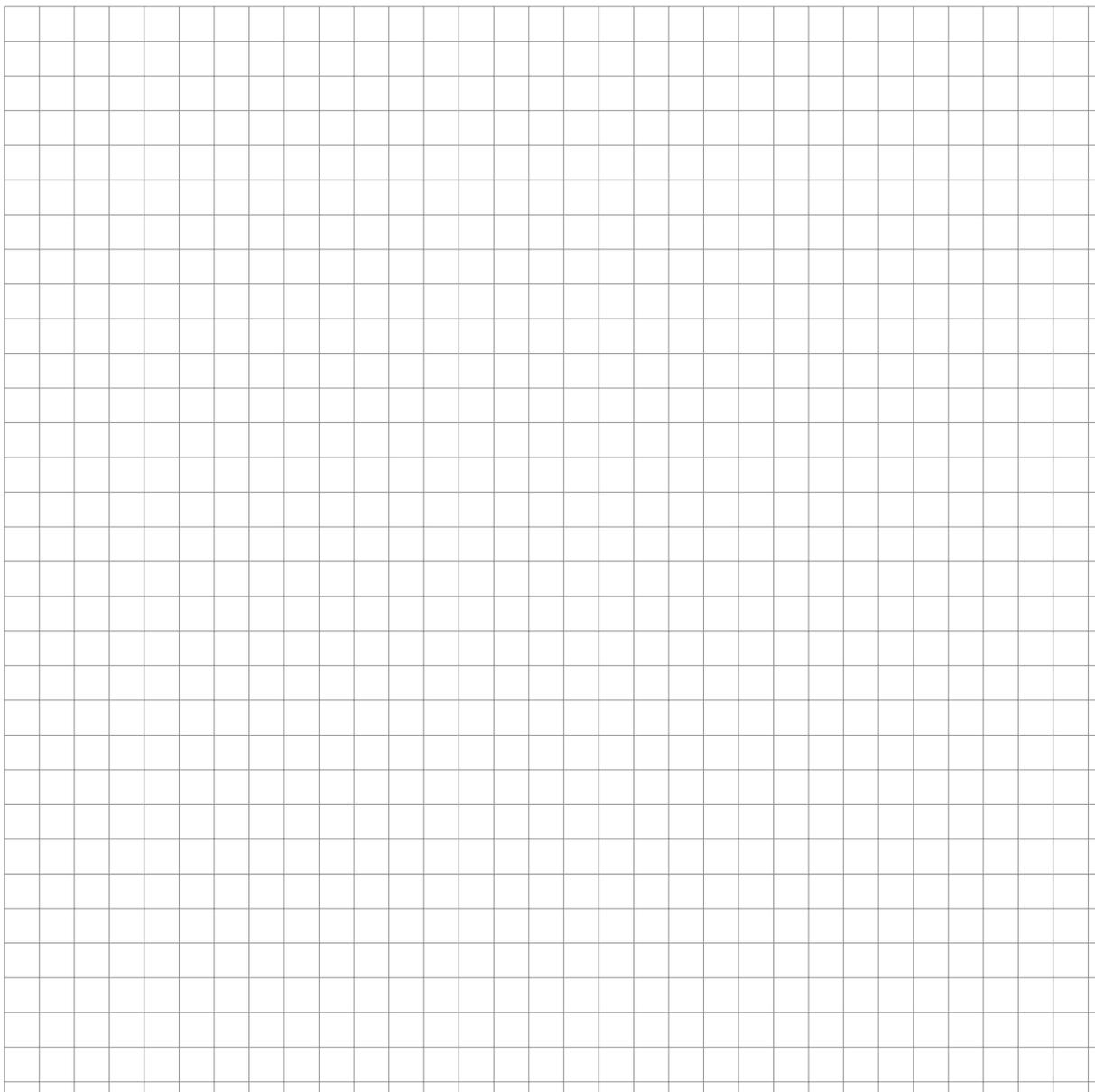
avec $a_0 \neq 0$. Cette écriture est la forme normalisée du développement limité de f en 0.

Proposition. Le développement limité ci-dessus implique l'équivalence : $f(x) \underset{(0)}{\sim} a_0x^p$

De plus le signe de $f(x)$ au voisinage de 0 est le signe de a_0x^p .

C. Développements limités des fonctions usuelles

Théorème. Les développements limités suivants en 0 sont valables pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Exemple 1. Développement limité de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = 0, 1, 2, 3, -1, \frac{1}{2}$.

▷ **Exercice 2.**

II. Calculs de développements limités

A. Opérations

Exemple 2.

- (i) Développement limité de e^{3x} en 0 à l'ordre 4.
- (ii) Développement limité de $\ln(1 - x)$ en 0 à l'ordre 5.
- (iii) Développement limité de $\frac{1}{1-x^2}$ en 0 à l'ordre 5.
- (iv) (Addition de DL) Développement limité de $e^x + e^{3x}$ en 0 à l'ordre 4.
- (v) (Multiplication de DL) Développement limité de $e^x \cos x$ en 0 à l'ordre 4.

▷ Exercices 3, 4, 5.

Exemple 3.

- (i) Développement limité de $\frac{1}{3+x}$ en 0 à l'ordre 3.
- (ii) Développement limité de $\ln(2 - x)$ en 0 à l'ordre 3.

▷ Exercice 6.

Exemple 4.

- (i) Développement limité de $\exp(2x - x^2)$ en 0 à l'ordre 4.
- (ii) (Composition de développements limités) $\ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 5.
- (iii) (Quotient de développements limités) $\frac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5.
- (iv) Développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

▷ Exercice 7.

Remarque : manipulation des petits o.

$o(3x^2) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=}$
$x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^4) o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$

B. Primitivation

Théorème (Primitivation de développements limités). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0 . On suppose que f' admet le développement limité à l'ordre n :

$$f'(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n).$$

Alors f admet le développement limité suivant à l'ordre $n + 1$:

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + c_0x + c_1\frac{x^2}{2} + \cdots + c_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration.

Exemple 5. Démonstration de la formule du développement limité de $\ln(1 + x)$.

Exemple 6.

(i) Développement limité de la fonction arcsin en 0 à l'ordre 5.

(ii) Développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre $2n + 1$.

