Chapitre B10 Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

A. Définition et existence

Définition. On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Lemme 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors* $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G})$.

Démonstration. Soit $m = \mathrm{Card}(\mathcal{L})$, $p = \mathrm{Card}(\mathcal{G})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $m > p$. On note :

$$\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$$

Sous-lemme 1. *Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant p-1$. Supposons que la famille*

$$\mathcal{G}_k = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_p)$$

est génératrice. Alors il est possible d'intervertir les vecteurs $u_{k+1}, \dots, u_p$ de façon à ce que la famille

$$\mathcal{G}_{k+1} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_p)$$

soit génératrice.

Démonstration du sous-lemme 1. Supposons que la famille $\mathcal{G}_k$ est génératrice.

L'élément v_{k+1} existe car $k+1 \leqslant p < m$. Il est élément de E, qui est engendré par la famille $\mathcal{G}_k$, donc il existe des scalaires $\lambda_1 \dots \lambda_k$ et $\mu_{k+1} \dots \mu_p$ tels que :

$$v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \mu_p u_p$$

L'un des μ_j est non-nul, sinon on aurait

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k - v_{k+1}$$

ce qui contredirait le fait que la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est libre.

Ainsi il existe un entier j tel que μ_j est non-nul. Quitte à intervertir les indices des u_j, on suppose que $\mu_{k+1} \neq 0$. On a alors :

$$u_{k+1} = -\frac{1}{\mu_{k+1}}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k - v_{k+1} + \mu_{k+2} u_{k+2} + \cdots + \mu_p u_p)$$

Ceci montre que u_{k+1} est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{G}_{k+1}$. Or les autres éléments de $\mathcal{G}_k$ sont évidemment combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{G}_{k+1}$ car ils appartiennent à cette famille. Ainsi $\mathcal{G}_k \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$ et donc par propriété :

$$\text{Vect}(\mathcal{G}_k) \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$$

Ceci donne $E \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$, puis $E = \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$ car l'inclusion réciproque est évidente. Ainsi famille $\mathcal{G}_{k+1}$ est génératrice de E. Le sous-lemme est démontré. □

Suite de la démonstration du lemme 1. On pose $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. Grâce au sous-lemme on peut intervertir les indices des éléments de $\mathcal{G}_0$ de façon à ce que la famille

$$\mathcal{G}_1 = (v_1, u_2, \ldots, u_p)$$

soit génératrice. En appliquant encore plusieurs fois le sous-lemme on construit par récurrence finie une suite $(\mathcal{G}_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de familles génératrices de E.

Finalement, pour $k = p$, on obtient que la famille

$$\mathcal{G}_p = (v_1, \ldots, v_p)$$

est génératrice. Or $m > p$, donc le vecteur v_{p+1} existe. Il est élément de E donc il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$v_{p+1} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

Ceci est impossible car la famille $(v_1, \ldots, v_m)$ est libre.

Cette contradiction montre que $m \leqslant p$. □

Lemme 2. *Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit N l'ensemble des cardinaux de toutes les familles libres de E.

Alors N est une partie de $\mathbb{N}$. Elle est non vide car elle contient 0, puisque l'ensemble vide est une famille libre. Comme E est de dimension finie, alors il admet une famille génératrice, de cardinal m. D'après le lemme précédent, toute famille libre est de cardinal inférieur à m. Ceci montre que N est majorée.

Ainsi N est une partie non-vide et majorée de $\mathbb{N}$, donc elle admet un maximum, que l'on note n.

Comme $n \in N$ alors il existe une famille libre $\mathcal{L} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'éléments de E.

Le sous-lemme ci dessous montre que cette famille est une base de E, et donc E possède bien une base. □

Sous-lemme 2. *Une famille libre maximale de E est une base de E.*

Remarque. Une famille libre $\mathcal{L}$ est maximale si pour tout $u \in E$ la famille $\mathcal{L} \cup (u)$ est liée, *i.e.,* l'ajout de tout vecteur lui fait perdre sa liberté.

Dans le cas ci-dessus toute famille de la forme $\mathcal{L} \cup (u)$ est de cardinal $n+1$. Comme n est la maximum de N alors la famille $\mathcal{L} \cup (u)$ ne peut être libre.

Démonstration du sous-lemme 2.

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont même cardinal.*

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de E et on note $\dim E$ le cardinal de ses bases.

Démonstration. Si E est de dimension finie, alors d'après le lemme 2 il possède une base $\mathcal{B}$. Soit n le cardinal de cette base.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E, et n' son cardinal. Comme $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathcal{B}'$ est libre, alors d'après le lemme 1 $n' \leqslant n$. Comme $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice, alors toujours d'après le lemme 1 $n \leqslant n'$. Ainsi $n = n'$.

Finalement toutes les bases de E sont de cardinal n. □

B. Exemples

Exemples fondamentaux.

(i) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, car la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est de cardinal n : $\dim \mathbb{R}^n = n$

(ii) L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle, car la famille vide en est une base : $\dim \{0\} = 0$

(iii) L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$, car la famille $\left(X^k \mid 0 \leqslant k \leqslant n\right)$ en est une base.

(iv) L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est de dimension np.

(v) Les espaces vectoriels $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne sont pas de dimension finie (démonstration pour $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ page 8).

Remarque. L'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, de base (1),
- un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, de base $(1, i)$.

Ainsi la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dépend du corps $\mathbb{K}$. On note donc parfois $\dim_{\mathbb{K}} E$ la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Par exemple :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

Définitions. Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle, un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.

Exemples.

(i) Soit I un intervalle, a une fonction continue. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0$$

est une droite vectorielle de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
En effet cet ensemble est $\{\lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ où $y_0(t) = e^{A(t)}$ avec A une primitive de a. La fonction y_0 est bien non-nulle.

(ii) Soit a, b, c trois réels, a étant non-nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
En effet cet ensemble est de la forme $\{\alpha y_1 + \beta y_2 \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ où y_1 et y_2 sont, selon les cas :

$$\begin{array}{llll} & y_1(t) = e^{\lambda_1 t} & y_2(t) = e^{\lambda_2 t} & \text{avec} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{ou} & y_1(t) = e^{\lambda_0 t} & y_2(t) = te^{\lambda_0 t} & \\ \text{ou} & y_1(t) = e^{ut} \cos vt & y_2(t) = e^{ut} \sin vt & \text{avec} \quad v \neq 0 \end{array}$$

On vérifie dans chaque cas que la famille (y_1, y_2) est libre.

(iii) Soit a, b, c trois scalaires, a étant non-nul. L'ensemble des suites vérifiant la relation de double-récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
En effet cet ensemble est de la forme $\{\alpha(v_n) + \beta(w_n) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ où les suites (v_n) et (w_n) sont, selon les cas :

$$\begin{array}{llll} & v_n = \lambda_1^n & w_n = \lambda_2^n & \text{avec} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{ou} & v_n = \lambda_0^n & w_n = n\lambda_0^n & \text{avec} \quad \lambda_0 \neq 0 \end{array}$$

On vérifie dans chaque cas que la famille (v, w) est libre.

Proposition (dimension d'un produit). *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si E et F sont de dimensions finies alors $E \times F$ est de dimension finie, et :*

Exemple. Soit n et p deux entiers naturels. Alors il existe un isomorphisme naturel :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_p)) & \longmapsto & \end{array}$$

Nous verrons qu'un isomorphisme conserve la dimension, ce qui justifie ici que :

$$\dim\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p\right) = n + p = \dim \mathbb{R}^n + \dim \mathbb{R}^p$$

Démonstration. On suppose que E et F sont de dimensions finies, que l'on note n et p. Alors E et F admettent des bases. On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F.

On rappelle la définition :

$$E \times F = \{\, (u, v) \mid u \in E \quad v \in F\}$$

On définit la famille $(g_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+p}$ de vecteurs de $E \times F$ par :

$$g_1 = (e_1, 0_F) \quad \dots \quad g_n = (e_n, 0_F) \qquad g_{n+1} = (0_E, f_1) \quad \dots \quad g_{n+p} = (0_E, f_p)$$

En d'autres termes :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad g_k = (e_k, 0_F) \qquad \text{et} \qquad \forall j = 1, \dots, p \qquad g_{n+j} = (0_E, f_j)$$

Démontrons que cette famille est libre et génératrice de $E \times F$.

Premièrement, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E et la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de F, donc :

$$\begin{aligned} E \times F &= \{\, (u, v) \mid u \in E \quad v \in F\} \\ &= \{\, (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \dots + \mu_p f_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p\} \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} E \times F &= \{\, (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \lambda_{n+1} f_1 + \dots + \lambda_{n+p} f_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}\} \\ &= \left\{ (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, 0_F) + (0_E, \lambda_{n+1} f_1 + \dots + \lambda_{n+p} f_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p} \right\} \\ &= \{\lambda_1 (e_1, 0_F) + \dots + \lambda_n (e_n, 0_F) + \lambda_{n+1} (0_E, f_1) + \dots + \lambda_{n+p} (0_E, f_p) | \\ &\qquad\qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p} \big\} \\ &= \left\{ \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n + \lambda_{n+1} g_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} g_{n+p} \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(g_1, \dots, g_n, g_{n+1}, \dots, g_{n+p}) \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(g_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+p}$ est génératrice de $E \times F$.

Soit maintenant $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p})$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n + \lambda_{n+1} g_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+p} g_{n+p} = 0_{E\times F}$$

Ceci donne :

$$(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \lambda_{n+1} f_1 + \cdots + \lambda_{n+p} f_p) = (0_E, 0_F)$$

On en déduit :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n+1} f_1 + \cdots + \lambda_{n+p} f_p = 0_F$$

Comme les familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ sont libres alors :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+p} = 0$$

La famille $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant n+p}$ est donc libre.

Elle est libre et génératrice de $E \times F$ donc c'est une base de $E \times F$, et comme elle contient $n + p$ éléments alors $E \times F$ est de dimension $n + p$. $\square$

Proposition (dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels).
Soit $E_1, \dots, E_p$ une famille de p espaces vectoriels, où $p \in \mathbb{N}$.
Si tous les E_i sont de dimensions finies alors leur produit est de dimension finie et :

$$\dim (E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$$

Corollaire. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un entier naturel. Alors l'espace vectoriel E^p est de dimension finie, et cette dimension est :* $\dim(E^p) = p \dim E$

Exemple. Comme $\mathbb{K}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$, on retrouve : $\dim \mathbb{K}^n = n$.

C. Théorèmes

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors :*

(i) Toute famille génératrice possède au moins n éléments.

(ii) Toute famille libre possède au plus n éléments.

(iii) Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice possédant n éléments alors $\mathcal{G}$ est une base.

(iv) Si $\mathcal{L}$ est une famille libre possédant n éléments alors $\mathcal{L}$ est une base.

Remarque. On résume les propriétés *(iii)* et *(iv)* en disant que toute famille *génératrice minimale* est une base, et toute famille *libre maximale* est une base.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\operatorname{Card}\mathcal{B} = \dim E = n$.

(i) Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice. Comme la famille $\mathcal{B}$ est libre alors $\operatorname{Card}\mathcal{B} \leqslant \operatorname{Card}\mathcal{G}$ d'après le lemme 1. La famille $\mathcal{G}$ possède donc au moins n éléments.

(ii) Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. Comme la famille $\mathcal{B}$ est génératrice alors $\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathcal{B}$ d'après le lemme 1. La famille $\mathcal{L}$ possède donc au plus n éléments.

(iii) Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de cardinal n. Si $\mathcal{G}$ n'est pas libre alors l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres, et donc la famille $\mathcal{G}$ privée de cet élément est génératrice. Or elle est de cardinal $n-1$, ce qui contredit le *(i)*. Ainsi la famille $\mathcal{G}$ est libre, et donc c'est une base de E.

(iv) Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de cardinal n. Alors $\mathcal{L}$ est libre maximale donc d'après le sous-lemme 2 elle est une base de E. $\square$

Exemple 1.

(i) Soit $u_1 = (2,1)$ et $u_2 = (1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Alors la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) La famille $\left((X-3)^k \;\middle|\; k = 0 \dots n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(iii) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Théorème de la base extraite. *De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel on peut extraire une base.*

Démonstration. Si une famille génératrice finie n'est pas libre, alors un de ses éléments est combinaison linéaire des autres, donc la famille privée de cet élément reste génératrice.

On peut retirer des éléments tant que la famille est liée, elle reste génératrice. On obtient finalement une famille libre et génératrice, donc une base. □

Théorème de la base incomplète. *Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m)$ une famille libre de E, espace vectoriel de dimension finie n. Comme E est de dimension finie alors il admet une base. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E.

Alors $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. Par récurrence finie, en appliquant le sous-lemme 1 on obtient que, quitte à intervertir les éléments de $\mathcal{B}$, la famille

$$\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$$

est génératrice de E. Comme elle est de cardinal n, d'après la propriété *(iii)* du théorème ci-dessus c'est une base de E.

La famille $\mathcal{L}$ a bien été complétée en une base de E. □

Remarque. On a démontré que de plus la famille libre peut être complétée en choisissant des vecteurs dans une famille génératrice donnée.

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

A. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :*

(i) F est de dimension finie

(ii) $\dim F \leqslant \dim E$

(iii) $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$.

Démonstration. Soit $n = \dim E$.

(i) Soit N l'ensemble des cardinaux des familles libres de F. Alors N est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide, majorée par n car les familles libres de F sont des familles libres de E. Ainsi N admet un maximum, que l'on note p.

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F de cardinal p. Alors cette famille est maximale, donc d'après le sous-lemme 2 elle est une base de F. Elle est *a fortiori* génératrice de F, donc F est de dimension finie, cette dimension est égale à p.

(ii) Une base de F est une famille libre de cardinal p, elle est libre dans E, donc $p \leqslant n$.

(iii) Si $E = F$ il est clair que leurs dimensions sont égales : $n = p$.

Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre d'éléments de E, dont le cardinal est égal à la dimension de E, donc par théorème $\mathcal{B}$ est une base de E. Ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$, et comme $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = F$ alors $E = F$. □

Corollaire. *Soit F et G deux sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E. Si $F \subseteq G$ et* $\dim F = \dim G$ *alors $F = G$:*

▷ **Exercice 1.**

B. Sous-espaces supplémentaires

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*

(i) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G supplémentaire de F, i.e., *tel que $E = F \oplus G$.*

(ii) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Soit $(u_1, \ldots, u_m)$ une base de F et $(v_1, \ldots, v_p)$ une base de G. Alors la famille $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_p)$ est une base de E.

(iii) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors :

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

(iv) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$\dim E = \dim F + \dim G \qquad \textit{et} \qquad F \cap G = \{0_E\}$$

Alors F et G sont supplémentaires.

Définition. Dans la situation du *(ii)* on dit que la base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ est adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.

Démonstration.

(i) Comme F est un sous-espace vectoriel de E et E est de dimension finie, alors F est de dimension finie, et donc F admet une base.
Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une base de F. Alors cette famille est une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète il existe une famille $(v_1, \dots, v_p)$ telle que la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ est une base de E. On note :

$$G = \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_p)$$

Démontrons que $E = F \oplus G$. Premièrement :

$$\begin{aligned} F + G &= \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m) + \mathrm{Vect}\,(v_1, \dots, v_p) \\ &= \mathrm{Vect}\,((u_1, \dots, u_m) \cup (v_1, \dots, v_p)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p) \\ &= E \end{aligned}$$

Deuxièmement, si u est un élément de $F \cap G$ alors il existe deux familles $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ de scalaires tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p$$

Ceci montre que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + (-\mu_1) v_1 + \cdots + (-\mu_p) v_p = 0_E$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre donc les scalaires λ_i et μ_j sont tous nuls. Ainsi $u = 0_E$.
Ceci montre que $F \cap G = \{0_E\}$.
Finalement nous avons démontré que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, donc par propriété $E = F \oplus G$: les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.

(ii) On note $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$. Démontrons que cette famille est libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p)$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p = 0_E$$

Alors :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_p v_p$$

Ce vecteur est élément de F et de G, donc il est nul, car F et G sont en somme directe. Ainsi, les familles $(u_1, \dots, u_m)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ étant libres, tous les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p$ sont nuls, et la famille $\mathcal{B}$ est libre.
Démontrons que $\mathcal{B}$ est génératrice.
Soit w un élément de E. Comme $E = F \oplus G$ alors il existe un vecteur u de F et un vecteur v de G tels que $w = u + v$. Comme les familles $(u_1 \dots u_m)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ sont des bases respectivement de F et de G, alors il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m \qquad \text{et} \qquad v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p$$

Comme $w = u + v$, alors w est combinaison linéaire d'éléments de la famille $\mathcal{B}$. Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E, et finalement c'est une base de E.

(iii) Ce point est conséquence du précédent.

(iv) Par théorème : $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

On suppose que $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. Il suffit de démontrer que $E = F + G$ pour obtenir que F et G sont supplémentaires.

Soit $E' = F + G$. Comme $F \cap G = \{0\}$, alors $E' = F \oplus G$. D'après la propriété *(iii)* $\dim E' = \dim F + \dim G$ et donc par hypothèse $\dim E' = \dim E$.

Ainsi E' est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E, et donc par théorème $E = E' = F \oplus G$. □

Corollaire (Caractérisation de la somme directe). *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :*

Lemme. *Soit $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_p)$ une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel E. Alors $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(u_{m+1}, \dots, u_p)$ sont en somme directe.*

Démonstration. Soit u un élément de $F \cap G$. Comme u est élément de F et de G alors il existe deux familles $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et $(\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_p)$ de scalaires telles que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = \lambda_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \lambda_p u_p$$

Par soustraction :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m - \lambda_{m+1} u_{m+1} - \cdots - \lambda_p u_p = 0_E$$

Comme la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre alors tous les λ_i sont nuls. Ainsi $u = 0_E$.

Ceci montre que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est évidente donc $F \cap G = \{0_E\}$, ce qui implique que F et G sont en somme directe. □

Théorème de la base adaptée. *Soit $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Soit $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(u_{m+1}, \dots, u_n)$. Alors :*

- *la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de F,*
- *la famille $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ est une base de G,*
- *F et G sont supplémentaires dans E : $\quad E = F \oplus G$*

Démonstration. La famille $(u_1, \dots, u_m)$ est incluse dans la base $(u_1, \dots, u_n)$ donc elle est libre. Comme $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$ alors elle est génératrice de F, et donc c'est une base de F.

De même, la famille $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ est une base de G.

Comme la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E alors tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire de ses éléments, donc comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Ceci montre que $E = F + G$.

Le lemme précédent montre que F et G sont en somme directe, donc finalement F et G sont supplémentaires : $E = F \oplus G$. □

Résumé.

C. Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels

Théorème (Formule de Grassmann). *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :*

Démonstration.

T. S. V. P.

D. Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle rang de $\mathcal{F}$ et on note $\operatorname{rg} \mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.

Exemple 2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F} = ((1,1,0,0),(2,1,1,1),(0,-1,1,1))$.

Proposition. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n. Alors :*

(i) $\operatorname{rg} \mathcal{F} \leqslant p$. *L'égalité a lieu si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.*

(ii) $\operatorname{rg} \mathcal{F} \leqslant n$. *L'égalité a lieu si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.*

Corollaire. *Une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est une base de E si et seulement si elle est de rang n.*

Démonstration. On note $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$. Alors $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim F$.

(i) La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de F donc $\dim F \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{F}$, puis $\operatorname{rg} \mathcal{F} \leqslant p$.

Si $\operatorname{rg} \mathcal{F} = p$ alors la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F de cardinal $p = \dim F$, donc par théorème c'est une base de F. Elle est donc libre.

Réciproquement si la famille $\mathcal{F}$ est libre alors elle est une base de F, donc $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim F = \operatorname{Card} \mathcal{F} = p$.

(ii) Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim F \leqslant \dim E$, donc $\operatorname{rg} \mathcal{F} \leqslant n$.

Le rang de $\mathcal{F}$ est égal à n si et seulement si $\dim F = \dim E$, ce qui équivaut à $F = E$ puisque $F \subseteq E$. Or $F = E$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E. □

▷ **Exercice 2.**

III. Applications linéaires en dimension finie

A. Image d'une base

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie.

Remarque. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille génératrice de E. Alors la famille $f(\mathcal{G}) = (f(u_1), \dots, f(u_p))$ est une famille de vecteurs de F. Elle est génératrice de $\operatorname{im} f$:

En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base de E alors $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\operatorname{im} f$.

Proposition (Image d'une base). *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors*

(i) La famille $f(\mathcal{B})$ est libre si et seulement si f est injective.

(ii) La famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F si et seulement si f est surjective.

(iii) La famille $f(\mathcal{B})$ est une base de F si et seulement si f est bijective.

Remarque. En particulier, un isomorphisme envoie une base sur une base.

Démonstration. Le *(ii)* est évident en vertu de la remarque ci-dessus, et le *(iii)* est conséquence de *(i)* et *(ii)*. Il suffit donc de démontrer le *(i)*.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

T. S. V. P.

Théorème. *Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie.*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de F.
Alors il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$\forall i = 1 \ldots p \qquad f(e_i) = v_i$$

Remarque. En conséquence :
Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
Si on connaît l'image d'une base par une application linéaire alors on peut connaître l'image de tout élément.

Démonstration. Supposons qu'il existe une application linéaire $f : E \to F$ envoyant chacun des e_i sur le v_i correspondant.

Soit u un vecteur de E, de coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors par linéarité :

$$f(u) = f(\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_p f(e_p) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

Comme le p-uplet de coordonnées de u est uniquement déterminé alors f est uniquement déterminée. De plus elle est linéaire car :

- Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ sont les coordonnées respectives de deux vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$, alors $(\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_p + \mu_p)$ sont les coordonnées de $u + v$.
  Ainsi $f(u + v) = f(u) + f(v)$, ceci pour tous vecteurs u et v de E.
- Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et α est un scalaire, alors $(\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_p)$ sont les coordonnées de αu.
  Ainsi $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, ceci pour tout vecteur u de E et tout scalaire α.

Nous avons donc démontré qu'il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour tout i allant de 1 à p. $\square$

Exemple 3.

(i) Dans $E = \mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$. Soit $v_1 = (8, -2)$ et $v_2 = (3, 5)$. Alors il existe un et un seul endomorphisme de E tel que $f(e_1) = v_1$ et $f(e_2) = v_2$.

(ii) La famille $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Par théorème il existe une et une seule application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que
$$f(1, 1) = (2, 4, 2) \qquad \text{et} \qquad f(1, -1) = (0, 4, -2).$$
Quelle est l'expression générale de f ?

▷ **Exercice 3.**

B. Rang d'une application linéaire

Définition. Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle rang de f et on note $\operatorname{rg} f$ la dimension de l'image de f.

Remarque. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On rappelle (*cf* remarque page 14) que la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de l'image de f :
$$\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}\left(f(\mathcal{B})\right)$$
La définition du rang de f est donc rigoureuse car $\operatorname{im} f$ est de dimension finie.

De plus pour toute base $\mathcal{B}$ de E : $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$. Le rang de l'*application linéaire* f coïncide avec celui de la *famille de vecteurs* $f(\mathcal{B})$.

Exemple 4.

(i) Soit $f : E \to F$. Alors $\operatorname{rg} f = 0$ si et seulement si f est l'application nulle.

(ii) Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x_1, \dots, x_5) & \longmapsto & (x_1, x_2, 0, 0) \end{array}$
Alors $\operatorname{rg} f = 2$.

Proposition. *Avec les hypothèses de la définition ci-dessus,* $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$. *Si de plus F est de dimension finie alors* $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$. Or $f(\mathcal{B})$ est de cardinal $p = \dim E$, donc $\operatorname{rg} f(\mathcal{B}) \leqslant p$.

Supposons que F est de dimension finie n. Comme $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de F alors $\dim(\operatorname{im} f) \leqslant n$, donc $\operatorname{rg} f \leqslant n$. □

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n. Alors :*

(i) *f est injective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = p$

(ii) *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = n$

(iii) *f est bijective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = n = p$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

(i) Par équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est libre} \\ &\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} \mathcal{B} = \dim E = p \end{aligned}$$

En effet nous avons démontré que :

- f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre pour toute base $\mathcal{B}$
- pour toute famille $\mathcal{F}$ d'éléments de E, $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \operatorname{Card} \mathcal{F}$
- pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$.

(ii) Ensuite :

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est génératrice de } F \\ &\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \dim F = n. \end{aligned}$$

En effet nous savons que :

- f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F pour toute base $\mathcal{B}$ de E
- pour toute famille $\mathcal{F}$ d'éléments de F, $\mathcal{F}$ est génératrice de F si et seulement si $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim F$
- pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$.

(iii) Cette propriété découle immédiatement des deux précédentes. □

Proposition. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors :*

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f)$$

Démonstration. L'image de $g \circ f$ est incluse dans celle de g :

$$\operatorname{im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{im} g$$

donc :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$$

Soit maintenant $\mathcal{B}$ une base de $\operatorname{im} f$. La famille $g(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $g(\operatorname{im} f) = \operatorname{im}(g \circ f)$, donc :

$$\dim \operatorname{im}(g \circ f) \leqslant \operatorname{Card} g(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} \mathcal{B} = \dim \operatorname{im} f$$

Ceci donne :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$$

Finalement on obtient le résultat voulu :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f)$$ □

C. Isomorphismes en dimension finie

Définition. Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$.

Remarque. La relation d'isomorphisme est une *relation d'équivalence*. En effet elle est :

- *réflexive* : E est isomorphe à lui-même
- *symétrique* : si E est isomorphe à F alors F est isomorphe à E
- *transitive* : si E est isomorphe à F et F est isomorphe à G alors E est isomorphe à G.

Proposition. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, alors il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$. D'après la propriété «image d'une base» page 14 l'image d'une base par un isomorphisme est une base donc E et F ont même dimension.

Supposons que E et F ont même dimension. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.

Comme $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{B}'$ est une famille de n vecteurs de F alors par théorème il existe une unique application linéaire φ telle que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \varphi(e_i) = f_i$$

L'image par φ de la base $\mathcal{B}$ de E est une base de F donc φ est un isomorphisme, encore d'après la propriété «image d'une base». Ainsi E et F sont isomorphes. □

Exemple 5. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ sont isomorphes. En effet, les applications

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R}) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1 \ \cdots \ x_n) \end{array}$$

sont linéaires et bijectives, donc ce sont des isomorphismes.

Lemme. *Soit $\varphi : E \to F$ un isomorphisme. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E. Alors* $\dim \varphi(E_1) = \dim E_1$.

En d'autres termes la dimension est invariante par isomorphisme.

Démonstration. Notons $F_1 = \varphi(E_1)$. Alors la restriction de φ à E_1 est à valeurs dans F_1, donc l'application

$$\psi : \begin{array}{rcl} E_1 & \longrightarrow & F_1 \\ u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array}$$

est bien définie.

De plus elle est injective car φ l'est : si $\psi(u) = 0_F$ alors $\varphi(u) = 0_F$ et donc $u = 0_E$.

Elle est surjective par définition de F_1.

Finalement ψ est bijective, donc les dimensions de E_1 et de F_1 sont égales. □

Proposition. *Soit D, E, F, G quatre espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(i) Si $\varphi : D \to E$ est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg} f$.

(ii) Si $\psi : F \to G$ est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(\psi \circ f) = \operatorname{rg} f$.

En d'autres termes le rang d'une application linéaire est invariant par composition avec un isomorphisme.

Démonstration.

(i) Comme φ est bijective alors $\varphi(D) = E$, donc $f \circ \varphi(D) = f(E)$ puis $\operatorname{im}(f \circ \varphi) = \operatorname{im} f$ donc $\operatorname{rg}(\varphi \circ f) = \operatorname{rg} f$.

(ii) Comme ψ est un isomorphisme, alors $\operatorname{im} f$ et $\psi(\operatorname{im} f)$ sont de même dimension. Or $\psi(\operatorname{im} f) = \operatorname{im}(\psi \circ f)$, donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(\psi \circ f)$. □

D. Théorème du rang

Lemme. *Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit E' un supplémentaire du noyau de f dans E : $E = E' \oplus \ker f$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} g : E' &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

Théorème du rang. *Soit E et F étant deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

Démonstration. On utilise les notations du lemme précédent.

Exemple 6.

(i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire injective. Alors $\operatorname{rg} f = 2$.

(ii) Soit n et p deux entiers, et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Si f est injective alors $p \leqslant n$, si f est surjective alors $p \geqslant n$.

▷ **Exercice 4.**

Corollaire. *Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire.*

(i) Si f est injective alors f est bijective.

(ii) Si f est surjective alors f est bijective.

Démonstration.

Corollaire. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors f est injective si et seulement si f est surjective (et donc dans ce cas f est bijective).*

Remarque. Dans les deux cas ci-dessus, *i.e.*, si la dimension de l'espace de départ est égale à celle de l'espace d'arrivée :

$$f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective}$$

Exemple 7. Soit n un entier strictement positif, et soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des scalaires deux à deux distincts.

a. Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

b. Justifier que pour tous scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_n$ il existe un et un seul polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$: $\quad P(\alpha_i) = \beta_i$

E. Application aux hyperplans

Rappel. Soit E un espace vectoriel.

(i) Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.

(ii) Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*

Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

Démonstration. Un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ non-nulle telle que $H = \ker \varphi$.

Alors $\operatorname{im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, donc $\operatorname{im} \varphi = \{0_{\mathbb{K}}\}$ ou $\operatorname{im} \varphi = \mathbb{K}$.

Si $\operatorname{im} \varphi = \{0_{\mathbb{K}}\}$ alors φ est nulle, ce qui est supposé faux, donc $\operatorname{im} \varphi = \mathbb{K}$ (et φ est surjective).

D'après le théorème du rang :

Ceci montre que les hyperplans sont de dimension $n-1$.

Réciproquement si H est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ alors comme E est de dimension finie il admet un supplémentaire D : $E = H \oplus D$.

Comme $\dim H = n-1$ alors $\dim D = 1$, ce qui montre que D est une droite vectorielle, donc H est un hyperplan. □

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et m un entier naturel strictement positif. Soit $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E. Alors :*

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^{m} H_k \right) \geqslant n - m$$

<u>Démonstration</u>. Pour tout $k = 1, \dots, m$ on choisit une forme linéaire $\varphi_k : E \to \mathbb{K}$ dont H_k est le noyau. On définit ensuite l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ u &\longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)) \end{aligned}$$

Les composantes de f sont des formes linéaires donc f est linéaire.

Un vecteur de E appartient au noyau de f si et seulement s'il annule toutes les φ_k, donc si et seulement s'il appartient à tous les H_k. Le noyau de f est donc l'intersection des H_k :

$$\ker f = \bigcap_{k=1}^{m} H_k$$

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker f = \dim E - \dim \operatorname{im} f$$

On sait que E est de dimension n. Comme $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ alors il est de dimension inférieure ou égale à m, donc on obtient bien :

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^{m} H_k \right) \geqslant n - m \qquad \square$$

Remarque. On peut démontrer que l'égalité a lieu si et seulement si la famille des formes linéaires φ_k est libre.

Corollaire. *Soit n et p deux entiers strictement positifs.*

Alors l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est de dimension au moins $p - n$.

<u>Démonstration</u>. Un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ est un ensemble d'équation :

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires non tous nuls.

Soit S_0 un système linéaire de n équations à p inconnues.

Chaque ligne de ce système définit un hyperplan de $\mathbb{K}^p$. L'ensemble des solutions est alors l'intersection de n hyperplans de $\mathbb{K}^p$, donc il est de dimension au moins $p - n$. $\square$

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$, où $m \in \{0, \ldots, n\}$.*
Alors il existe m hyperplans de E dont F est l'intersection.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-m})$ une base de F. Cette famille est libre donc d'après le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs $(e_{n-m+1}, \ldots, e_n)$ la complétant en une base de E. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ cette base.

Pour tout k allant de $n-m+1$ à n on définit la famille $\mathcal{B}_k$ contenant tous les e_i sauf e_k :

$$\forall k = n-m+1, \ldots, n \qquad \mathcal{B}_k = \mathcal{B} \setminus \{e_k\}$$

Enfin on note H_k le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B}_k$.

Comme la famille $\mathcal{B}$ est libre alors toutes les familles $\mathcal{B}_k$ sont libres. Chacune est donc une base de H_k. Or elles contiennent $n-1$ vecteurs, donc les H_k sont de dimension $n-1$, et ce sont des hyperplans de E.

Démontrons que F est l'intersection des H_k.

Soit u un vecteur de E, de coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors u appartient à H_k si et seulement si sa coordonnée selon e_k est nulle :

$$\forall k = n-m+1, \ldots, n \qquad u \in H_k \iff \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

Le sens indirect de cette équivalence est évident. Pour le sens direct : si $u \in H_k$ alors il existe des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tels que $u = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ avec $\mu_k = 0$, donc par unicité des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ on en déduit $\lambda_k = 0$.

Ceci montre que :

$$\begin{aligned} \forall u \in E \qquad u \in \bigcap_{k=n-m+1}^{n} H_k &\iff \lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_n = 0 \\ &\iff u \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-m}) = F \end{aligned}$$

Ainsi F est l'intersection des hyperplans $H_{n-m+1}, \ldots, H_n$, lesquels sont bien au nombre de m. □