# Corrigé du Devoir à la Maison n°10

## Exercice 1.

1. Comme  $P=X^3+pX+q$  alors  $P'=3X^2+p$ . La division euclidienne de P par P' donne P=P'Q+R avec :

$$Q = \frac{1}{3}X$$
 et  $R = \frac{2}{3}pX + q$ .

2. (a) La spécialisation du résultat précédent en  $\alpha$  est :

$$P(\alpha) = P'(\alpha)Q(\alpha) + R(\alpha)$$

Par théorème, si  $\alpha$  est une racine double de P alors  $\alpha$  est racine de P et de P', *i.e.*,  $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ , et donc  $R(\alpha) = 0$ .

Comme  $p \neq 0$  alors  $\alpha = -\frac{3q}{2p}$ .

Ainsi  $-\frac{3q}{2p}$  est la seule racine double possible de P.

(b) Supposons que P admet une racine double. Alors d'après la question précédente cette racine est  $\alpha = -\frac{3q}{2p}$ . Comme elle est racine double de P alors elle est racine de  $P' = 3X^2 + p$  donc :

$$3\left(\frac{3q}{2p}\right)^2 + p = 0$$

La multiplication par  $4p^2$  de cette égalité donne  $27q^2+4p^3=0$  donc  $\Delta=0$ . Réciproquement, supposons que  $\Delta=0$ . Soit  $\alpha=-\frac{3q}{2p}$ . Alors :

$$P'(\alpha) = 3\left(\frac{3q}{2p}\right)^2 + p = \frac{27q^2 + 4p^3}{4p^2} = \frac{\Delta}{4p^2} = 0$$

Ceci montre que  $P'(\alpha) = 0$ . De plus, il est immédiat que  $R(\alpha) = 0$ , donc la division euclidienne montre que  $P(\alpha) = 0$ . Ainsi  $\alpha$  est racine double de P puisqu'elle est racine de P et de P'.

Finalement P admet une racine double si et seulement si  $\Delta = 0$ .

3. Supposons que p = 0.

Comme  $\Delta = 4p^3 + 27q^2$  alors :

$$\Delta = 0 \iff q = 0$$

Si q = 0 alors  $P = X^3$ , ce polynôme admet bien une racine double, et même triple, il s'agit de 0.

Si  $P = X^3 + q$  admet une racine double, alors cette racine est également racine de  $P' = 3X^2$ , donc elle est nulle, et donc q = 0 car  $P(\alpha) = 0$ .

On a démontré que P admet une racine double si et seulement si  $\Delta = 0$ , que p soit nul ou non-nul.

### Exercice 2.

Soit Q = XP - 1.

Comme P est de degré 2022 alors Q est de degré 2023.

Pour tout  $k = 1, \ldots, 2023$  on a  $P(k) = \frac{1}{k}$ , donc Q(k) = 0.

Ainsi tous les entiers de 1 à 2023 sont racines de Q.

Comme Q est de degré 2023 alors il n'a pas d'autres racines, et toutes sont simples.

On en déduit, en notant  $\lambda$  le coefficient dominant de Q :

$$Q = \lambda \prod_{k=1}^{2023} (X - k).$$

On remarque que Q(0) = -1, ce qui donne :

$$-1 = \lambda \prod_{k=1}^{2023} (-k) = \lambda (-1)^{2023} \prod_{k=1}^{2023} k = -\lambda \times 2023!.$$

Ainsi  $\lambda = \frac{1}{2023!}$ , puis :

$$Q(2024) = \frac{1}{2023!} \prod_{k=1}^{2023} (2024 - k).$$

Le changement d'indice  $\ell = 2024 - k$  donne :

$$Q(2024) = \frac{1}{2023!} \prod_{\ell=1}^{2023} \ell = 1.$$

Comme Q = XP - 1 alors :

$$P(2024) = \frac{1}{2024}(1 + Q(2024)) = \frac{1}{1012}.$$

Finalement :  $P(2024) = \frac{1}{1012}$ .

## Exercice 3.

On note T une période f.

1. Comme T est une période de f alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
  $f(x+T) = f(x)$ .

La dérivée de la fonction  $x \mapsto x + T$  est la fonction  $x \mapsto 1$ , donc en dérivant on obtient par composition :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
  $f'(x+T) = f'(x)$ .

La fonction f' est donc périodique de période T.

- 2. Comme la fonction f est T-périodique alors :
  - f(0) = f(T).

La fonction f est de classe  $C^1$ , donc :

- f est continue sur [0,T],
- f est dérivable sur ]0, T[.

D'après le théorème de Rolle il existe  $c \in [0, T]$  tel que f'(c) = 0.

Comme la fonction f' est T-périodique alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$
  $f'(c+nT) = 0.$ 

Ceci montre que f' s'annule en un nombre infini de points.

3. Comme la fonction f est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors la fonction f' est continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f' est bornée sur le segment [0, T].

Comme elle est T-périodique alors elle est bornée sur  $\mathbb R$  tout entier.

En effet la périodicité montre que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ : f([nT, (n+1)T]) = f([0, T]), et comme  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]$  alors :

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]\right) = f([0, T])$$

Soit M un majorant de |f'| sur  $\mathbb{R}$ . Alors :

- f est dérivable sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ :  $|f'(t)| \leq M$ .

L'inégalité des accroissements finis montre que la fonction f est M-lipschitzienne.

- 4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit la propriété :
  - $\mathcal{P}_n$ : La fonction  $f^{(n)}$  est périodique et s'annule en un nombre infini de points.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Initialisation. Les questions 1 et 2 montrent que la propriété  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un  $n \in \mathbb{N}^*$  la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

Alors  $f^{(n)}$  est périodique. Comme f est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  alors  $f^{(n)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

D'après les questions 1 et 2, appliquées à la fonction  $f^{(n)}$ , sa dérivée  $f^{(n+1)}$  est périodique et s'annule en une infinité de points.

Donc la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $f^{(n)}$  s'annule en une infinité de points, donc il existe  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que  $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ .

### Exercice 4.

On note  $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  la fonction polynomiale  $x \mapsto P(x)$ .

1. On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , pour i allant de 1 à k-1.

Comme la fonction P est polynomiale alors elle est dérivable, donc pour tout  $i=1,\ldots,k-1$ :

- La fonction P est continue sur  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ .
- La fonction P est dérivable sur  $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ .
- $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1})$  car  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$  sont racines de P.

D'après le théorème de Rolle il existe  $\beta_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  tel que  $P'(\beta_i) = 0$ .

En particulier:

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \alpha_k$$
.

Ceci montre que les réels  $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$  sont deux-à-deux distincts.

2. Pour tout i = 1, ..., k, soit  $m_i$  la multiplicité de  $\alpha_i$  en tant que racine de P. Comme P est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\alpha_1, ..., \alpha_k$  sont ses racines alors :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
 (\*)

Soit n le degré de P. Comme P est non-nul alors  $n \in \mathbb{N}$ , et l'égalité  $(\star)$  montre que :

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Par propriété des polynômes chaque  $\alpha_i$  est racine de P' de multiplicité  $m_i - 1$ , donc P' est multiple de  $(X - \alpha_i)^{m_i - 1}$  pour tout i = 1, ..., k.

De plus chaque  $\beta_i$  est racine de P', donc P' est multiple de  $(X - \beta_i)$  pour tout  $i = 1, \ldots, k - 1$ .

Comme les réels  $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$  sont deux-à-deux distincts alors les polynômes  $(X - \alpha_1), \ldots, (X - \alpha_k), (X - \beta_i), \ldots, (X - \beta_{k-1})$  sont premiers entre eux deux-à-deux, donc P' est multiple de :

$$Q = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i - 1} \times \prod_{i=1}^{k-1} (X - \beta_i).$$

Le degré de ce polynôme est :

$$\sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} 1 = n - k + k - 1 = n - 1$$

Comme le polynôme P' est de degré n-1 alors il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $P' = \mu Q$ , ce qui montre que P' est scindé.

On peut ajouter que son coefficient dominant est  $\mu = n\lambda$ .

## Exercice 5.

1. Soit  $x_0$  un point de  $\mathbb{R}$ . Comme f est 1-lipschitzienne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(x_0)| \leqslant |x - x_0|.$$

Par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ceci montre que f est continue en  $x_0$ .

Ceci est vrai pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  donc f est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit x et y deux points de A.

Alors x et y sont points fixes de f, i.e., f(x) = x et f(y) = y.

Quitte à les inverser on peut supposer que  $x \leq y$ .

Soit z un réel tel que  $x \leq z \leq y$ . Comme f est 1-lipschitzienne alors :

$$|f(z) - f(x)| \le |z - x|$$
 et  $|f(z) - f(y)| \le |z - y|$ .

comme  $x \le z \le y$  alors  $z - x \ge 0$  et  $y - z \ge 0$ , donc :

$$x - z \le f(z) - f(x) \le z - x$$
 et  $z - y \le f(z) - f(y) \le y - z$ .

Comme x et y sont points fixes de f:

$$x-z\leqslant f(z)-x\leqslant z-x\qquad\text{et}\qquad z-y\leqslant f(z)-y\leqslant y-z$$
puis 
$$2x-z\leqslant f(z)\leqslant z\qquad \text{et}\qquad z\leqslant f(z)\leqslant 2y-z.$$

On obtient  $f(z) \leq z$  et  $z \leq f(z)$ , donc f(z) = z par antisymétrie.

Ceci montre que  $z \in A$ .

On a démontré que pour tous x et y éléments de A et z élément de  $\mathbb{R}$ , si  $x \leq z \leq y$  alors  $z \in A$ :

$$\forall (x,y) \in A^2 \qquad \forall z \in \mathbb{R} \qquad (x \leqslant z \leqslant y \implies z \in A).$$

Par définition A est un intervalle.

3. Comme A est non-vide et borné alors d'après les propriétés des bornes inférieures et supérieures A admet un plus petit majorant et un plus grand minorant, donc une borne inférieure et une borne supérieure.

Soit 
$$a = \text{Inf } A \text{ et } b = \text{Sup } A.$$

Comme a est le plus grand minorant de A alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le réel  $a + \frac{1}{n}$  n'est pas un minorant de a, donc il existe  $a_n \in A$  tel que  $a_n < a + \frac{1}{n}$ .

Comme  $a_n \in A$  alors  $a \leq a_n$ , donc  $a \leq a_n < a + \frac{1}{n}$ .

On a ainsi construit une suite  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$  d'éléments de A vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a \leqslant a_n < a + \frac{1}{n}.$$

Par théorème d'encadrement la suite  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$  converge vers a.

Comme f est continue alors la suite  $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$  converge vers f(a).

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in A$  alors  $f(a_n) = a_n$ .

Par unicité de la limite f(a) = a, i.e.,  $a \in A$ .

Ainsi Inf $A \in A$ : a est le minimum de A.

On démontre de même que  $\sup A \in A : b$  est le maximum de A.

Ainsi A est un intervalle borné, admettant un minimum et un maximum, donc A est un segment : A = [a, b].