Programme de colles
Semaine 21
du 18 au 22 mars 2024

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Soit p un endomorphisme de E, F son image et G son noyau. Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

2. Le développement limité d'une fonction impaire en 0 a ses coefficients pairs nuls.

3. Développements limités en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$.

4. Développement limité en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercices

Chapitre B8. Espaces vectoriels

I. Espaces vectoriels
II. Sous-espaces vectoriels
III. Sommes de sous-espaces vectoriels
IV. Familles finies de vecteurs
V. Sous-espaces affines

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités
II. Image et Noyau
III. Formes linéaires
IV. Projecteurs et symétries

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B9 : Applications linéaires et A10 : Développements limités.

Chapitre B8. **Espaces vectoriels**

I. Espaces vectoriels

Définition, premières propriétés ($\lambda u = 0$ si et seulement si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$). Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{K})$, fonctions, suites. Produit cartésien de n espaces vectoriels.

II. Sous-espaces vectoriels

Définition, caractérisation. Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Définition d'une combinaison linéaire.

Exemples : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, etc.

Intersection, sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

III. Sommes de sous-espaces vectoriels

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires.

IV. Familles finies de vecteurs

Familles génératrices, libres, liées. Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre. Base, coordonnées, bases canoniques. Définition de la dimension, sans démonstration, sans théorèmes.

Extension aux familles infinies. Combinaison linéaire des éléments d'une partie de E, partie génératrice. Suites presque nulles, supports d'une suite. Parties de E libres, liées. Base infinie.

V. Sous-espaces affines

Translation, sous-espace affine. Unicité de la direction. Intersection de deux sous-espaces affines.

Exemples classiques : ensembles des solutions d'un système linéaire, d'une équation différentielle linéaire.

Chapitre B9. **Applications linéaires**

I. Généralités

Application linéaire, caractérisation. Endomorphisme, notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$. Exemples : identité, application nulle, homothéties. Combinaisons linéaires, composées d'applications linéaires. Bilinéartié de $(g, f) \mapsto g \circ f$, $\mathcal{L}(E)$ est un anneau. Isomorphismes, notation $\mathrm{GL}(E)$. Restriction à un sev.

Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

II. Image et Noyau

Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité. L'ensemble des solutions de $f(u) = b$ d'inconnue b est un sous-espace affine.

III. Formes linéaires

Définition, exemples (spécialisation d'un poynôme, d'une fonction, d'une suite). Forme linéaire coordonnée e_i^*. Toute forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$ est de la forme $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_px_p$.

Une application de E dans $\mathbb{K}^n$ est linéaire ssi toutes ses composantes sont linéaires.

Droites et hyperplans : une droite est un sev engendré par un vecteur non-nul, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle. Si H est un hyperplan alors toute droite vectorielle non contenue dans H en est un supplémentaire. Tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan. Unicité à homothétie près de la forme linéaire définissant un hyperplan.

IV. Projecteurs et symétries

Définitions des projecteurs et symétrie. Caractérisations : $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$.