Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 18 mars 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°11

Partie A.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$F = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) \quad \text{avec} \quad u_1 = (1,1,1,1) \quad u_2 = (1,2,3,4) \quad u_3 = (1,3,6,10)$$
$$G = \{\,(x,y,z,t) \in E \mid x+y = z+t = 0\}\,.$$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   Donner une base de chacun d'entre eux et leur dimension.
2. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.
3. Soit $u = (x,y,z,t)$ un vecteur de E.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de u pour que u appartienne à F.
   Cette condition est donc une équation de F.
   On pourra vérifier que u_1, u_2, u_3 satisfont celle-ci.
4. Démontrer que $F + G = E$.
5. Soit $D = \text{Vect}\,(u_4)$ avec $u_4 = (0,1,1,1)$.
   Démontrer que F et D sont supplémentaires dans E.
6. On souhaite donner une expression du projecteur de E sur F parallèlement à D, que l'on note p.
   (a) Soit $u = (x,y,z,t)$ un vecteur de E. Démontrer qu'il existe un scalaire λ tel que $u - \lambda u_4 \in F$ et exprimer λ en fonction des coordonnées de F.
   (b) En déduire l'expression de $p(u)$ en fonction des coordonnées de u.
   (c) En guise de vérification calculer $p(u_i)$ pour $i = 1, \ldots, 4$ et expliquer les résultats obtenus.

Partie B.

On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une base finie.

On admet que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.

1. On suppose que F et G sont supplémentaires dans E.
   Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de F, $(v_1, \ldots, v_q)$ une base de G.
   On note $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E.
   (c) En déduire que E est de dimension finie, et que $\dim E = \dim F + \dim G$.
2. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel F' de E tel que $F = (F \cap G) \oplus F'$.
   On note $H = F + G$.
   (a) Démontrer que $H = F' \oplus G$.
   (b) En déduire une formule donnant la dimension de $F + G$ en fonction de celles de F, G et $F \cap G$.