

<p style="text-align: center;">Programme de colles Semaine 22 du 25 au 29 mars 2024</p>
--

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Asymptote en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x^2+5}{x+3}$ (ou d'une fonction similaire), position relative de la courbe de la fonction par rapport à l'asymptote.
2. Une famille libre maximale est une base.
3. Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire et \mathcal{B} une base de E . Alors f est injective si et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est libre.
4. Lemme : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit E' un supplémentaire de $\ker f$ dans E . Alors $g : E' \rightarrow \operatorname{im} f$ qui à u associe $f(u)$ est un isomorphisme.
5. Théorème du rang, démonstration à l'aide du lemme précédent.

Exercices

Chapitre B9. Applications linéaires

- I. Généralités
- II. Image et Noyau
- III. Formes linéaires
- IV. Projecteurs et symétries

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre A10 : Développement limités.

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

Application linéaire, caractérisation. Endomorphisme, notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$. Exemples : identité, application nulle, homothéties. Combinaisons linéaires, composées d'applications linéaires. Bilinearité de $(g, f) \mapsto g \circ f$, $\mathcal{L}(E)$ est un anneau. Isomorphismes, notation $\text{GL}(E)$. Restriction à un sev.

Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

II. Image et Noyau

Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité. L'ensemble des solutions de $f(u) = b$ d'inconnue b est un sous-espace affine.

III. Formes linéaires

Définition, exemples (spécialisation d'un polynôme, d'une fonction, d'une suite). Forme linéaire coordonnée e_i^* . Toute forme linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K} est de la forme $(x_1, \dots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_px_p$.

Une application de E dans \mathbb{K}^n est linéaire ssi toutes ses composantes sont linéaires.

Droites et hyperplans : une droite est un sev engendré par un vecteur non-nul, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle. Si H est un hyperplan alors toute droite vectorielle non contenue dans H en est un supplémentaire. Tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan. Unicité à homothétie près de la forme linéaire définissant un hyperplan.

IV. Projecteurs et symétries

Définitions des projecteurs et symétrie. Caractérisations : $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{Id}$.