Corrigé du Devoir à la Maison n°11

Partie A.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$F = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) \quad \text{avec} \quad u_1 = (1,1,1,1) \quad u_2 = (1,2,3,4) \quad u_3 = (1,3,6,10)$$
$$G = \{\,(x,y,z,t) \in E \mid x + y = z + t = 0\}\,.$$

1. Les vecteurs u_1, u_2, u_3 appartiennent à E et $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ donc par propriété F est un sous-espace vectoriel de E.
   De plus la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est génératrice de F.
   Démontrons qu'elle est libre.
   Soit λ_1, λ_2, λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$. Ceci équivaut au système :

$$S : \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

   L'algorithme du pivot de Gauss donne les équivalences successives :

$$S \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

   Il admet pour unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$.
   On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

   Ceci montre que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
   Finalement la famille $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F et ainsi F est de dimension 3.

   Pour l'ensemble G on écrit :

$$\begin{aligned} G &= \{\,(x,y,z,t) \in E \mid y = -x \quad \text{et} \quad t = -z\} \\ &= \left\{(x,-x,z,-z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\,((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))\,. \end{aligned}$$

   Notons $v_1 = (1,-1,0,0)$ et $v_2 = (1,-1,0,0)$. Alors $G = \text{Vect}\,(v_1, v_2)$ avec v_1 et v_2 appartenant à E donc G est un sous-espace vectoriel de E.
   De plus la famille $\mathcal{G} = (v_1, v_2)$ est une famille génératrice de G.
   Comme les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires alors elle est libre, et donc c'est une base de G.
   On en déduit que G est de dimension 2.

2. Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de $F \cap G$.
   Comme $u \in F$ alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.
   Ceci donne le système :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = y \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = z \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 10\lambda_3 = t. \end{cases}$$
   Comme $u \in G$ alors $x + y = z + t = 0$, donc λ_1, λ_2, λ_3 vérifient le système :
$$S' : \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 7\lambda_2 + 16\lambda_3 = 0. \end{cases}$$
   Par l'algorithme du pivot de Gauss :
$$S' \sim \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \quad\quad + 4\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2\lambda_1 + \quad - 5\lambda_3 = 0 \\ \quad\quad + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{2}\lambda_3 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3. \end{cases}$$
   Ainsi le vecteur u appartient à $F \cap G$ si et seulement si il existe λ_3 tel que :
$$u = \tfrac{5}{2}\lambda_3 u_1 - 3\lambda_3 u_2 + \lambda_3 u_3 = \lambda_3\Big(\tfrac{5}{2}u_1 - 3u_2 + u_3\Big).$$
   Ceci montre que :
$$F \cap G = \Big\{ \lambda_3\Big(\tfrac{5}{2}u_1 - 3u_2 + u_3\Big) \;\Big|\; \lambda_3 \in \mathbb{R} \Big\} = \mathrm{Vect}\left(\tfrac{5}{2}u_1 - 3u_2 + u_3\right).$$
   On calcule : $\frac{5}{2}u_1 - 3u_2 + u_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$.
   Soit $w_1 = (1, -1, -1, 1)$. Alors $F \cap G = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}w_1\right) = \mathrm{Vect}\,(w_1)$:
$$F \cap G = \mathrm{Vect}\,(w_1) \quad \text{avec} \quad w_1 = (1, -1, -1, 1).$$
   La famille (w_1) est génératrice de $F \cap G$, elle est libre car w_1 est non-nul, donc c'est une base de $F \cap G$.
   On en déduit que $F \cap G$ est de dimension 1.
3. Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de E. Alors u appartient à F si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, donc si et seulement si :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = y \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = z \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 10\lambda_3 = t. \end{cases}$$
   L'algorithme du pivot de Gauss déjà appliqué dans la question 1 montre que ce système équivaut à :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \quad\quad \lambda_2 + 2\lambda_3 = -x + y \\ \quad\quad\quad + \lambda_3 = x - 2y + z \\ \quad\quad\quad\quad 0 = -x + 3y - 3z + t. \end{cases}$$
   Ce système admet une solution si et seulement si $x - 3y + 3z - t = 0$.
   Ainsi F admet pour équation $x - 3y + 3z - t = 0$, *i.e.*, :
$$F = \{ (x, y, z, t) \in E \mid x - 3y + 3z - t = 0 \}.$$
   On peut vérifier que les vecteurs u_1, u_2, u_3 satisfont cette équation.

4. La question précédente permet de donner une autre famille génératrice de F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in E \mid t = x - 3y + 3z\} \\ &= \left\{(x,y,z,x-3y+3z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,0,1),(0,1,0,-3),(0,0,1,3)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\,(u_1',u_2',u_3') \quad \text{avec} \quad u_1' = (1,0,0,1) \quad u_2' = (0,1,0,-3) \quad u_3' = (0,0,1,3). \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{F}'$ cette nouvelle famille génératrice : $\mathcal{F}' = (u_1', u_2', u_3')$.
Comme $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}')$ et $G = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G})$ alors $F + G = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}' \cup \mathcal{G})$, c'est-à-dire :

$$F + G = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(1,0,0,1)}_{u_1'}, \underbrace{(0,1,0,-3)}_{u_2'}, \underbrace{(0,0,1,3)}_{u_3'}, \underbrace{(1,-1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,0,1,-1)}_{v_2}\Big).$$

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de E.
On remarque que $e_4 = \frac{1}{4}(u_3' - v_2)$, $e_3 = \frac{1}{3}(u_3' + 3v_2)$, donc $e_3 \in F + G$ et $e_4 \in F + G$.
Comme $e_1 = u_1' - e_4$ et $e_2 = u_2' + 3e_4$ alors $e_1 \in F + G$ et $e_2 \in F + G$.
Finalement $(e_1, e_2, e_3, e_4) \subseteq F + G$.
Comme $F + G$ est un espace vectoriel de E alors il est stable par combinaisons linéaires et donc $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4) \subseteq F + G$.
Ceci donne $E \subseteq F + G$, et on sait que $F + G \subseteq E$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Par double inclusion $F + G = E$.

5. Comme $D = \mathrm{Vect}\,(u_4)$ avec $u_4 \in E$ alors D est un sous-espace vectoriel de E.
Démontrons que $E = F \oplus D$.
<u>Méthode 1</u>. L'application $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & x - 3y + 3z - t \end{array}$ est une forme linéaire.
En effet elle est de la forme $(x,y,z,t) \mapsto ax + by + cz + dt$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
On remarque que $F = \ker \varphi$, donc par définition F est un hyperplan de E.
Comme $\varphi(u_4) = -1 \neq 0$ alors $u_4 \notin F$ et donc D n'est pas inclus dans F.
Par théorème ceci impose que F et D sont supplémentaires. En effet, toute droite non incluse dans un hyperplan en est un supplémentaire.
<u>Méthode 2</u>. On démontre que $F \cap D = \{0_E\}$ et $F + D = E$.
Soit $u \in F \cap D$.
Comme $u \in D$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda u_4$, *i.e.*, $u = (0, \lambda, \lambda, \lambda)$.
Comme $u \in F$ alors u satisfait l'équation $x - 3y + 3z - t$ et donc $-\lambda = 0$, puis $u = 0_E$.
Ainsi $F \cap D \subseteq \{0_E\}$.
L'inclusion inverse est vraie car F et D sont des sous-espaces vectoriels de E.
Par double inclusion $F \cap G = \{0_E\}$.

Pour démontrer que $F + D = E$ on procède comme dans la question précédente :

$$F + G = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(1,0,0,1)}_{u_1'}, \underbrace{(0,1,0,-3)}_{u_2'}, \underbrace{(0,0,1,3)}_{u_3'}, \underbrace{(0,1,1,1)}_{u_4}\Big).$$

On calcule : $u_4 - u'_2 - u'_3 = e_4$. Donc $e_4 \in F + D$.
Comme $e_1 = u'_1 - e_4$, $e_2 = u'_2 + 3e_4$, $e_3 = u'_3 - 3e_4$, alors $(e_1, e_2, e_3, e_4) \subseteq F + D$.
Comme $F + D$ est un sous-espace vectoriel de E alors Vect $(e_1, e_2, e_3, e_4) \subseteq F + D$, donc $E \subseteq F + D \subseteq E$, et enfin $F + D = E$.
Comme $F \cap D = \{0_E\}$ et $F + D = E$ alors $E = F \oplus D$.

6. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à D.

(a) Soit $u = (x, y, z, t) \in E$. Alors $u - \lambda u_4 = (x, y - \lambda, z - \lambda, t - \lambda)$.
Ce vecteur appartient à F si et seulement s'il vérifie son équation $x - 3y + 3z - t = 0$:

$$\begin{aligned} u - \lambda u_4 \in F \quad &\iff \quad x - 3(y - \lambda) + 3(z - \lambda) - (t - \lambda) = 0 \\ &\iff \quad \lambda = -x + 3y - 3z + t \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\lambda = -x + 3y - 3z + t$ le vecteur $u - \lambda u_4$ appartient à F.

(b) Soit $u = (x, y, z, t) \in E$, et soit $\lambda = -x + 3y - 3z + t$. Alors :

$$u = (u - \lambda u_4) + \lambda u_4 \qquad \text{avec} \quad (u - \lambda u_4) \in F \quad \text{et} \quad \lambda u_4 \in D.$$

Cette écriture est donc la décomposition de u selon la somme directe $E = F \oplus D$.
Par définition du projecteur p on en déduit $p(u) = u - \lambda u_4$.
On obtient :

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= (x, y, z, t) + (x - 3y + 3z - t)(0, 1, 1, 1) \\ &= (x, x - 2y + 3z - t, x - 3y + 4z - t, x - 3y + 3z). \end{aligned}$$

(c) On calcule :
$$\begin{aligned} p(u_1) &= p(1, 1, 1, 1) &&= (1, 1, 1, 1) &&= u_1 \\ p(u_2) &= p(1, 2, 3, 4) &&= (1, 2, 3, 4) &&= u_2 \\ p(u_3) &= p(1, 3, 6, 10) &&= (1, 3, 6, 10) &&= u_3 \\ p(u_4) &= p(0, 1, 1, 1) &&= (0, 0, 0, 0) &&= 0_E. \end{aligned}$$

Effectivement, comme p est le projecteur de E sur F parallèlement à D alors ;

$$\forall u \in F \quad p(u) = u \qquad \text{et} \qquad \forall u \in D \quad p(u) = 0_E.$$

Comme u_1, u_2, u_3 appartiennent à F alors ils vérifient $p(u) = u$, et comme $u_4 \in D$ alors il vérifie $p(u) = 0_E$.

Partie B.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q)$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q = 0_E.$$

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F donc elle est génératrice de F, et la famille $(v_1, \dots, v_q)$ est une base de G donc elle est génératrice de G.
Comme F et G sont stables par combinaisons linéaires :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in F \qquad \text{et} \qquad \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q \in G.$$

Or d'après l'égalité ci-dessus :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = -(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q).$$

Ce dernier vecteur appartient donc à F et à G.
Or F et G sont supplémentaires, donc $F \cap G = \{0_E\}$, et ainsi :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q = 0_E.$$

Les familles $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_q)$ sont des bases de F et de G respectivement donc elles sont libres, ce qui montre que :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_q = 0.$$

On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$$
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_q = 0.$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

(b) Soit w un vecteur de E.
Comme F et G sont supplémentaires dans E alors $E = F + G$ et donc il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u + v$.
Comme la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de F alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$.
Comme la famille $(v_1, \dots, v_q)$ est génératrice de G alors il existe $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q$.
Or $w = u + v$, donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ tel que

$$w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q.$$

Tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, donc la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

(c) La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E donc c'est une base de E.
Elle contient $p + q$ vecteurs donc E est de dimension finie et $\dim E = p + q$.
Comme la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F alors $\dim F = p$.
Comme la famille $(v_1, \dots, v_q)$ est une base de G alors $\dim G = q$.
On a démontré que si $E = F \oplus G$ alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

2. (a) On démontre que $F' \cap G = \{0_E\}$ et $F' + G = H$.
Comme $F = (F \cap G) \oplus F'$ alors F' est un sous-espace vectoriel de F, *i.e.,* $F' \subseteq F$.
De plus, comme $F = (F \cap G) \oplus F'$ alors $(F \cap G) \cap F' = \{0_E\}$.
Or $(F \cap G) \cap F' = F \cap G \cap F' = (F' \cap F) \cap G = F' \cap G$, car $F' \subseteq F$.
Ceci montre que $F' \cap G = \{0_E\}$.

Comme $F' \subseteq F$ alors $F' + G \subseteq F + G = H$.
Démontrons l'inclusion réciproque.
Soit w un élément de H.
Comme $H = F + G$ alors il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u + v$.
Or $F = (F \cap G) \oplus F'$.
Comme $u \in F$ alors il existe $u_1 \in F \cap G$ et $u_2 \in F'$ tels que $u = u_1 + u_2$.
On a donc $w = u_1 + u_2 + v = u_2 + (u_1 + v)$.
Comme $u_1 \in G$ et $v \in G$ alors $u_1 + v \in G$, car G est un sous-espace vectoriel de E.
Ainsi $w = u_2 + (u_1 + v)$ avec $u_2 \in F'$ et $(u_1 + v) \in G$, donc $w \in F' + G$.
On a démontré que $H \subseteq F' + G$.
Par double inclusion $H = F' + G$.
Finalement $F \cap G = \{0_E\}$ et $F' + G = H$ donc $H = F' \oplus G$.

(b) On sait que F et G sont de dimensions finies.
Comme F et $(F \cap G)$ sont des sous-espaces vectoriels de F alors ils sont de dimensions finies.
Comme $F = (F \cap G) \oplus F'$ et $H = F' \oplus G$ alors d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \dim F &= \dim(F \cap G) + \dim F' \\ \dim H &= \dim F' + \dim G. \end{aligned}$$

On en déduit, sachant que $H = F + G$:

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Cette formule est connue sous le nom de *Formule de Grassmann.*