Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 2 avril 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°12

Soit n un entier naturel et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de taille (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour toute matrice A de E on appelle *commutant de* A l'ensemble $C(A)$ des matrices de E qui commutent avec A :

$$C(A) = \{ M \in E \mid \ AM = MA \}$$

On appelle *centre* de E l'ensemble des matrices de E qui commutent avec toutes les autres :

$$Z = \{ M \in E \mid \ \forall N \in E \quad MN = NM \}$$

Dans tout ce devoir on fixe une matrice A de E.

Pour toute matrice M de E on définit $f(M) = AM - MA$.

1. (a) Démontrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Démontrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Démontrer que Z est un sous-espace vectoriel de $C(A)$.

On pose dorénavant $n = 2$. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on suppose que c n'est pas nul.

Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les matrices I_2 et A : $G = \mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

2. (a) Donner la dimension de G.
   (b) Démontrer que G est inclus dans $C(A)$.
3. (a) Soit $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $f(E_{11})$ et $f(E_{12})$ puis justifier que ces matrices sont linéairement indépendantes.
   (b) Démontrer que le rang de f est supérieur ou égal à 2.
4. Démontrer que $C(A) = G$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique couple de réels (α_n, β_n) tel que $A^n = \alpha_n I_2 + \beta_n A$.
6. (a) Justifier que A n'appartient pas à Z.
   Que peut-on en déduire sur la dimension de Z ?
   (b) Justifier que Z contient au moins une matrice non-nulle et conclure : quelles sont les matrices de Z ?