Chapitre C2
Dénombrement

I. Cardinal

Définition. Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est son nombre d'éléments. On le note :

Propositions. *Soit E un ensemble fini et F une partie de E. Alors :*

(i) F *est finie*

(ii) $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$

(iii) $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ *si et seulement si* $F = E$.

Propositions. *Soit E et F deux ensembles finis, et $f : E \to F$ une application.*

(i) Si f est injective alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.

(ii) Si f est surjective alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.

(iii) Si f est bijective alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

(iv) Supposons que E et F sont de même cardinal. Alors :

f *injective* $\iff$

Remarque. Deux ensembles, finis ou non, sont dits de même cardinal s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

Propositions. *Soit E un ensemble fini.*

(i) Pour toute partie F de E :

$\operatorname{Card} \overline{F} =$

(ii) Pour toutes parties F et G de E :

$\operatorname{Card}(F \cup G) =$

Corollaire. *Si F et G sont deux parties finies* ***disjointes*** *d'un ensemble E alors :*

$\operatorname{Card}(F \cup G) =$

Proposition. *Si E et F sont deux ensembles finis alors :*

$$\mathrm{Card}(E \times F) =$$

Démonstration. Notons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \ldots, y_p\}$. Alors :

$$E \times F =$$

Cet ensemble est de cardinal np. □

Corollaire. *Soit E un ensemble fini, k un entier naturel. Alors :*

$$\mathrm{Card}(E^k) =$$

Démonstration. En effet :

$$E^k =$$

Cet ensemble est de cardinal n^k. □

Notation. On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F, où E et F sont deux ensembles.

Proposition. *Soit E et F sont deux ensembles finis. Alors :*

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{F}(E, F) =$$

On note d'ailleurs $\mathcal{F}(E, F) = F^E$.

Démonstration. Notons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. La donnée d'une application φ de E dans F est la donnée, pour tout $i = 1 \ldots n$, d'un élément de F. En d'autres termes, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E, F) &\longrightarrow F^n \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \end{aligned}$$

est une bijection. Sa réciproque est l'application :

$$\begin{aligned} F^n &\longrightarrow \mathcal{F}(E, F) \\ (u_1, \ldots, u_n) &\longmapsto (\varphi : x_i \mapsto u_i) \end{aligned}$$

Le cardinal est $\mathcal{F}(E, F)$ est donc égal à celui de F^n :

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{F}(E, F) = \mathrm{Card}(F^n) = (\mathrm{Card}\,F)^n = (\mathrm{Card}\,F)^{\mathrm{Card}\,E}$$ □

Notation. Pour tout ensemble E on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Proposition. *Si E est un ensemble fini à n éléments alors :*

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) =$$

<u>Démonstration</u>. Pour tout partie F de E on appelle fonction caractéristique de F la fonction $\chi_F : E \to \{0,1\}$ qui à tout x de E associe 1 si $x \in F$ et 0 sinon.

Les applications

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ F &\longmapsto \chi_F \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \Psi : \mathcal{F}(E,\{0,1\}) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

sont donc bijectives réciproques l'une de l'autre. Ceci montre que :

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = \operatorname{Card}\mathcal{F}(E,\{0,1\}) = 2^{\operatorname{Card}E}$$

Il s'agit bien du résultat attendu. $\square$

II. Listes

A. Propriétés

Notation. On note E un ensemble à n éléments et k un entier naturel.

Définition. Une k-liste est une liste de k éléments, c'est-à-dire un k-uplet.

Remarque. L'ensemble des k-listes d'éléments de E est E^k.

Proposition. *Le nombre de k-listes d'éléments de E est n^k.*

Proposition. *Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de k-listes d'éléments* **distincts** *de E est alors :*

Démonstration. Si $(x_1, \ldots, x_k)$ est une k-liste d'éléments distincts de E, alors x_1 est un des n éléments de E, puis x_2 est un des $n-1$ éléments de $E - \{x_1\}$, etc. □

Exemple 1. Soit F un ensemble à k éléments. Le nombre d'applications de F dans E est :

Le nombre d'applications injectives de F dans E est :

Le nombre d'applications bijectives de F dans E est :

Définition. Une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E.

Proposition. *Le nombre de permutations de E est $n!$. C'est le nombre de façons d'ordonner E.*

▷ **Exercice 1.**

B. Applications aux probabilités

Rappel. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Dans le cas où P est la probabilité uniforme sur Ω, c'est-à-dire la cas où :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{Card} \Omega}$$

Alors on obtient la probabilité de tout événement A grâce à la formule :

$$\forall A \subseteq \Omega \qquad P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$

On doit donc *dénombrer* (*i.e.,* compter) le nombre d'éléments de A et de Ω.

Exemple 2. Pour une course de 21 chevaux, combien de tiercés sont possibles ?

Combien contiennent le cheval numéro 13 ?

Que peut-on en déduire ?

Exemple 3. On jette simultanément deux dés.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux dés.

Déterminer les probabilités des événements $(X = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 7$.

▷ **Exercice 2.**

Exemple 4. Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ?
b. de 4 lettres distinctes ?
c. de 4 lettres dont un et un seul S ?
d. de 4 lettres distinctes dont le S ?
e. de 4 lettres dont le S en troisième position ?
f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ?
g. de 4 lettres dont au moins un S ?

Remarque. On possède un sac contenant 26 jetons avec les lettres de l'alphabet. On pioche 4 lettres une par une dans ce sac, obtenant ainsi un mot de 4 lettres.

(i) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S ?
(ii) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S en troisième position ?
(iii) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MPSI ?
(iv) Que deviennent ces probabilités si on pioche avec remise ?

▷ **Exercice 3.**

III. Combinaisons

A. Coefficients du binômes

Proposition. *Le nombre de parties à k éléments de E (ou de k-combinaisons) est :*

C'est également le nombre de façons de choisir k éléments parmi n.

Notation. On note dorénavant $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E.
Cet ensemble est donc de cardinal $\binom{n}{k}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{L}_k(E)$ l'ensemble des k-listes d'éléments distincts de E.

Soit F une partie de E à k éléments. Alors il existe $k!$ permutations de F. L'ensemble de ces permutations est $\mathcal{L}_k(F)$.

Toute k-liste d'éléments distincts de E est obtenue de cette façon donc :

$$\mathcal{L}_k(E) = \bigcup_{F \in \mathcal{P}_k(E)} \mathcal{L}_k(F)$$

Si deux parties F et F' sont différentes, alors $\mathcal{L}_k(F)$ et $\mathcal{L}_k(F')$ sont disjointes, donc :

$$\operatorname{Card} \mathcal{L}_k(E) = \sum_{F \in \mathcal{P}_k(E)} \operatorname{Card} \mathcal{L}_k(F)$$

Ceci donne

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \times \operatorname{Card}\left(\mathcal{P}_k(E)\right)$$

On obtient la formule annoncée. □

Proposition - Formule du binôme. *Soit a et b complexes. Alors :*

Démonstration. On écrit :

$$(a+b)^n = (a+b) \cdots (a+b)$$

Chaque monôme du développement de ce produit contient n facteurs a ou b, donc est de la forme $a^k b^{n-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Le nombre de monômes $a^k b^{n-k}$ est le nombre de façons de choisir k facteurs a parmi les n facteurs a possibles, donc $\binom{n}{k}$. □

Propositions.

(i) Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $k \leqslant n$ *:* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(iii) Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}$ *tels que* $0 < k < n$ *:* $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

<u>Démonstration</u>.

(i) L'application $\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ F & \longmapsto & \overline{F} \end{array}$ est une bijection (et même une involution).

Si un sous-ensemble contient k éléments alors son complémentaire en contient $n-k$, *i.e.*, l'image de $\mathcal{P}_k(E)$ par cette application est $\mathcal{P}_{n-k}(E)$, donc :

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}_k(E) = \operatorname{Card} \mathcal{P}_{n-k}(E)$$

Ceci donne la formule.

(ii) L'union

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$$

est disjointe, donc :

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card} \mathcal{P}_k(E)$$

Ceci donne la formule annoncée.

(iii)

B. Applications aux probabilités

Exemple 5. On pioche simultanément 4 boules d'une urne contenant 14 boules : 5 boules blanches, 3 boules noires et 6 boules rouges. Le nombre de tirages possibles est :

En effet on choisit pour univers :

Quelle est la probabilité d'obtenir :

(i) 4 boules rouges ?
(ii) 2 rouges, une noire et une blanche ?
(iii) Au moins une boule noire ?
(iv) Au moins une noire et une blanche ?

Proposition (Schéma hypergéométrique).
Soit $\mathcal{U}$ un ensemble de N objets, dont a ont la propriété A.
On pioche simultanément n objets dans cet ensemble $(0 \leqslant n \leqslant N)$.
Soit k un entier. La probabilité d'obtenir exactement k objets dotés de la propriété A est :

Remarque. Cette probabilité est non-nulle si : $\operatorname{Max}\{0, n+a-N\} \leqslant k \leqslant \operatorname{Min}\{a,n\}$.

▷ **Exercice 4.**

Exemple 6. Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, réparties en 4 couleurs (pique, cœur, carreau et trèfle) et 13 valeurs (as, roi, dame, valet, de 10 à 2).
Chaque joueur reçoit une *main* de cinq cartes.
Le nombre de mains possibles est :

Nombre de mains au Poker contenant :

un carré :

une suite :

On peut compter de la même façon le nombre de mains contenant un brelan (trois cartes de même valeur), une ou deux paires (deux cartes de même valeur), une couleur (cinq cartes de même couleur), un full (un brelan et une paire).

▷ **Exercices 5, 6.**