Corrigé du Devoir à la Maison n°12

1. Soit y une solution de l'équation $\mathscr{E}_P$. Comme $a_n \neq 0$ alors :
$$y^{(n)} = -\frac{a_{n+1}}{a_n} y^{(n-1)} - \cdots - \frac{a_1}{a_n} y' - \frac{a_0}{a_n} y. \tag{1}$$
On démontre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_k$: la fonction y est dérivable k fois.
Initialisation. Comme y est solution de l'équation $\mathscr{E}_P$ alors y est dérivable n fois donc les propriétés $\mathscr{P}_0, \ldots, \mathscr{P}_n$ sont vraies.
Hérédité. Supposons que pour un certain entier k la proposition $\mathscr{P}_k$ est vraie.
Si $k \leqslant n-1$ alors $k+1 \leqslant n$ donc on sait déjà que la proposition $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Supposons que $k \geqslant n$.
Alors la fonction y est dérivable k fois, donc pour tout $j = 0, \ldots, n-1$ la fonction $y^{(j)}$ est dérivable $k-j$ fois.
Comme $j \leqslant n-1$ alors $k-j \geqslant k-n+1$, donc les fonctions $y^{(j)}$ sont dérivables $k-n+1$ fois.
Par somme l'égalité (1) montre que la fonction $y^{(n)}$ est dérivable $k-n+1$ fois, donc y est dérivable $k+1$ fois et la proposition $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence la proposition $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc y est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Soit $y \in \mathscr{C}^\infty$, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Comme y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $y^{(k)}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Par combinaison linéaire la fonction $\Phi_P(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Pour tout $y \in \mathscr{C}^\infty$, $\Phi_P(y)$ est définie et appartient à $\mathscr{C}^\infty$, donc l'application Φ_P est bien définie.
La dérivation $y \mapsto y'$ est linéaire, donc par composition k fois, pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'application $y \mapsto y^{(k)}$ est linéaire.
L'application Φ_P est combinaison linéaire des applications $y \mapsto y^{(k)}$ pour k allant de 0 à n donc elle est linéaire.
Ainsi Φ_P est une application linéaire de $\mathscr{C}^\infty$ dans lui-même donc c'est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty$.
Son noyau est l'ensemble des application $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que $\Phi_P(y) = 0$, donc telles que $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$. Il s'agit des solutions de l'équation $\mathscr{E}_P$ qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.
D'après la question précédente les solutions de $\mathscr{E}_P$ sont toutes de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc $\ker \Phi_P$ est l'ensemble des solutions de l'équation $\mathscr{E}_P$, c'est-à-dire E_P : $\ker \Phi_P = E_P$.

3. Soit P et Q deux polynômes à coefficients complexes et λ un complexe.

   On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, où $n = \mathrm{Max}\,\{\deg P, \deg Q\}$.

   Alors $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k) X^k$, donc pour tout $y \in \mathscr{C}^\infty$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\lambda P+Q}(y) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k) y^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda a_k y^{(k)} + b_k y^{(k)}\right) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(k)} = \lambda \Phi_P(y) + \Phi_Q(y).\end{aligned}$$

   Ceci montre que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \Phi_{\lambda P+Q} = \lambda \Phi_P + \Phi_Q.$$

   L'application $P \mapsto \Phi_P$ est donc linéaire.

4. Comme $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ alors $PQ = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j X^{i+j}$.

   Soit $y \in \mathscr{C}^\infty$. Alors :

$$\Phi_{PQ}(y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j y^{(i+j)} = \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j \left(y^{(j)}\right)^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} b_j y^{(j)}\right)^{(i)}.$$

   Ceci donne :

$$\Phi_{PQ}(y) = \sum_{i=0}^{m} a_i (\Phi_Q(y))^{(i)} = \Phi_P(\Phi_Q(y)).$$

   Ceci étant valable pour tout $y \in \mathscr{C}^\infty$, on en déduit que : $\Phi_{PQ} = \Phi_P \circ \Phi_Q$.

   On a donc démontré que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2 \qquad \Phi_{PQ} = \Phi_P \circ \Phi_Q.$$

   Nous savions que Φ est une application linéaire de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$ dans l'espace vectoriel $(\mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty), +, \cdot)$.

   En ajoutant que $\Phi_1 = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\infty}$, nous pouvons aussi démontrer que Φ est un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{C}[X], +, \times)$ dans $(\mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty), +, \circ)$.

   Il s'agit en fait d'un *morphisme d'algèbres*.

5. (a) On sait que pour tout polynôme P, E_P est le noyau de l'application linéaire Φ_P de $\mathscr{C}^\infty$ dans lui-même.

   Par propriété un noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de départ, donc E_P est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty$.

   Démontrons que $E_P \subseteq E_R$.

   Soit $y \in E_P$. Alors $\Phi_P(y) = 0$. Comme $R = PQ$ alors $R = QP$ et d'après la question précédente $\Phi_R(y) = \Phi_Q \circ \Phi_P(y) = \Phi_Q(0) = 0$, donc $y \in \ker \Phi_R = E_R$.

   Ceci montre que $E_P \subseteq E_R$, et de même $E_Q \subseteq E_R$.

   Finalement E_P, E_Q et E_R sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^\infty$ avec $E_P \subseteq E_R$ et $E_Q \subseteq E_R$, donc E_P et E_Q sont des sous-espaces vectoriels de E_R.

(b) Comme P et Q sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Bézout il existe deux polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$.

Comme l'application Φ est linéaire alors : $\Phi_{PU+QV} = \Phi_{PU} + \Phi_{QV}$.

On sait aussi d'après la question (4) que : $\Phi_{PU} = \Phi_P \circ \Phi_U$ et $\Phi_{QV} = \Phi_Q \circ \Phi_V$.

On en déduit donc : $\Phi_{PU+QV} = \Phi_P \circ \Phi_U + \Phi_Q \circ \Phi_V$.

Comme $PU + QV = 1$ alors $\Phi_{PU+QV} = \Phi_1$.

Le polynôme 1 est le polynôme dont les coefficients sont $a_0 = 1$ et $a_k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$, donc pour tout $y \in \mathscr{C}^\infty$: $\Phi_1(y) = y$.

En d'autres termes $\Phi_1 = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\infty}$.

On a donc démontré que :

$$\forall y \in \mathscr{C}^\infty \qquad y = \Phi_P \circ \Phi_U(y) + \Phi_Q \circ \Phi_V(y).$$

(c) Comme E_P et E_Q sont des sous-espaces vectoriels de E_R alors $E_P + E_Q \subseteq E_R$.

Soit $y \in E_R$. Alors d'après la question précédente : $y = \Phi_P \circ \Phi_U(y) + \Phi_Q \circ \Phi_V(y)$.

Soit $y_2 = \Phi_P \circ \Phi_U(y)$ et $y_1 = \Phi_Q \circ \Phi_V(y)$. Alors :

$$\Phi_Q(y_2) = \Phi_Q \circ \Phi_P \circ \Phi_U(y) = \Phi_{QP} \circ \Phi_U(y) = \Phi_{QPU}(y) = \Phi_{UR}(y) = \Phi_U \circ \Phi_R(y).$$

Comme $y \in E_R = \ker \Phi_R$ alors $\Phi_R(y) = 0$.

Par linéarité de Φ_U : $\Phi_Q(y_2) = \Phi_U(0) = 0$.

Ceci montre que $y_2 \in E_Q$.

De même on démontre que $y_1 \in E_P$, et donc $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in E_P$ et $y_2 \in E_Q$. Ainsi $y \in E_P + E_Q$.

On en déduit que $E_R \subseteq E_P + E_Q$ et par double inclusion $E_R = E_P + E_Q$.

(d) Soit $y \in E_P \cap E_Q$. Alors $\Phi_P(y) = \Phi_Q(y) = 0$.

De même que précédemment on obtient :

$$y = \Phi_U \circ \Phi_P(y) + \Phi_V \circ \Phi_Q(y) = \Phi_U(0) + \Phi_V(0) = 0.$$

En effet les applications Φ_U et Φ_V sont linéaires.

Ainsi $y = 0$, et ceci montre que $E_P \cap E_Q \subseteq \{0\}$.

Comme E_P et E_Q sont des sous-espaces vectoriels de E_R alors $\{0\} \subseteq E_P \cap E_Q$, donc $E_P \cap E_Q = \{0\}$, *i.e.*, E_P et E_Q sont en somme directe.

Finalement $E_R = E_P + E_Q$ et $E_P \cap E_Q = \{0\}$, donc $E_R = E_P \oplus E_Q$.

6. (a) Comme $P = (X - \alpha)^n$ alors d'après la formule du binôme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\alpha)^{n-k} X^k.$$

Ceci donne :

$$\forall y \in \mathscr{C}^\infty \qquad \Phi_P(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\alpha)^{n-k} y^{(k)}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $a(t) = e^{-\alpha t}$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et ses dérivées successives sont :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad a^{(k)}(t) = (-\alpha)^k e^{-\alpha t}.$$

Comme $z(t) = a(t)y(t)$ alors d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \qquad z^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)}(t) y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\alpha)^{n-k} e^{-\alpha t} y^{(k)}(t) \\ &= e^{-\alpha t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\alpha)^{n-k} y^{(k)}(t) \right).\end{aligned}$$

Comme $e^{-\alpha t}$ est non-nul :

$$z^{(n)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\alpha)^{n-k} y^{(k)} = 0$$

On reconnaît $\Phi_P(y)$, et donc :

$$z^{(n)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi_P(y) = 0.$$

On a donc démontré que : $\quad y \in E_P \quad \Longleftrightarrow \quad z^{(n)} = 0$

(b) On note $\mathbb{C}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients complexes de degré au plus n.

Soit z une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On définit la propriété :

$$\mathscr{P}_n : \qquad z^{(n)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{C}_{n-1}[x]$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Initialisation.</u> Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle alors $z' = 0$ si et seulement si z est constante, *i.e.*, $z \in \mathbb{C}_0[x]$. La propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété est vraie. Alors :

$$z^{(n+1)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (z')^{(n)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z' \in \mathbb{C}_{n-1}[x].$$

Ainsi z est une primitive d'une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$, donc z est une fonction polynomiale de degré au plus n, *i.e.*, $z \in \mathbb{C}_n[x]$.

Réciproquement, si $z \in \mathbb{C}_n[x]$ alors $z' \in \mathbb{C}_{n-1}[x]$, donc la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $y \in \mathscr{C}^\infty$ et $z : t \mapsto e^{-\alpha t} y(t)$. D'après la question précédente :

$$y \in E_P \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^{(n)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in \mathbb{C}_{n-1}[x].$$

Comme $z(t) = e^{-\alpha t} y(t)$ alors $y(t) = e^{\alpha t} z(t)$, donc

$$y \in E_P \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(t) = A(t) e^{\alpha t} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

On a donc démontré : $\quad E_P = \{ t \mapsto A(t) e^{\alpha t} \mid A \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \}.$

(c) De façon équivalente :

$$E_P = \left\{ t \mapsto a_0 e^{\alpha t} + a_1 t e^{\alpha t} + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} e^{\alpha t} \;\middle|\; (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

On définit les fonctions $y_0, \ldots, y_{n-1}$ par :

$$\forall k = 0, \ldots, n-1 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad y_k(t) = t^k e^{\alpha t}.$$

Ainsi :

$$E_P = \operatorname{Vect}(y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

Ceci montre que la famille $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ est génératrice de E_P.

Démontrons qu'elle est libre.

Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ des scalaires tels que $a_0 y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-1} = 0$, *i.e.*, :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad a_0 e^{\alpha t} + a_1 t e^{\alpha t} + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} e^{\alpha t} = 0.$$

Comme $e^{\alpha t} \neq 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} = 0.$$

En posant $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad P(t) = 0.$$

Le polynôme P s'annule en une infinité de points, donc il est nul.

Ainsi $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

On a démontré que :

$$\forall (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \qquad a_0 y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0.$$

La famille $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ est donc libre.

Comme elle est génératrice de E_P alors c'est une base de E_P.

Comme elle contient n éléments alors E_P est de dimension n.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$ la propriété : si P est de degré n alors $\dim E_P = n$.

On démontre par récurrence forte que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme P est supposé non-nul, sont degré est bien un entier naturel.

<u>Initialisation.</u> Si P est de degré 0 alors P est constant non-nul : $P = a \in \mathbb{C}^*$.

L'équation $\mathscr{E}_P$ est alors $ay = 0$. Comme $a \neq 0$ elle donne $y = 0$, et donc $E_P = \{0\}$.

Cet espace vectoriel est de dimension nulle, donc $\dim E_P = 0$.

La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité.</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k < n$.

Soit P un polynôme de degré n. Comme $n \geqslant 1$ alors d'après le théorème de d'Alembert-Gauss P admet au moins une racine.

Notons α une racine de P, et m son ordre de multiplicité. Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Comme α est la seule racine de $(X-\alpha)^m$ et α n'est pas racine de Q alors $(X-\alpha)^m$ et Q sont premiers entre eux.

D'après la question (5) : $E_P = E_{(X-\alpha)^n} \oplus E_Q$.

Par théorème : $\dim E_P = \dim E_{(X-\alpha)^m} + \dim E_Q$.

D'après la question précédente : $\dim E_{(X-\alpha)^m} = m$.

Soit $k = \deg Q$. Comme $P = (X-\alpha)^m Q$ alors $\deg P = m + k$, et comme α est racine de P alors $m \geqslant 1$, donc $k < n$.

La propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie par hypothèse de récurrence, donc $\dim E_Q = k$.

On en déduit :

$$\dim E_P = m + k = \deg(X-\alpha)^m + \deg Q = \deg((X-\alpha)^m Q) = \deg P.$$

La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc vraie, l'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Le théorème cité par l'énoncé peut être démontré de la même façon, par récurrence forte sur le degré de P.

En effet, on déduit de la question (5) que $E_P = E_{(X-\alpha)n} \oplus E_Q$, ce qui permet d'écrire les solutions de l'équation $\mathscr{E}_P$ comme sommes de solutions de $\mathscr{E}_{(X-\alpha)^n}$ et de solutions de $\mathscr{E}_Q$.

Autre remarque. On peut ajouter que si P est le polynôme nul alors l'équation $\mathscr{E}_P$ est $0 = 0$, elle est vraie pour tout $y \in \mathscr{C}^\infty$, donc $E_P = \mathscr{C}^\infty$, ce qui donne $\dim E_P = +\infty = -\deg P$.

8. L'équation

$$y^{(4)} - 11y^{(2)} + 18y^{(1)} - 8y = 0$$

est l'équation $\mathscr{E}_P$ où $P = X^4 - 11X^2 + 18X - 8$.

On remarque que 1 est racine de P.

Comme $P' = 4X^3 - 22X + 18$ et $P'' = 12X^2 - 22$ alors $P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$, donc 1 est racine de P d'ordre de multiplicité 2.

Il existe donc un polynôme Q tel que $P = (X-1)^2 Q$.

Par division euclidienne on calcule : $P = (X-1)^2(X^2 + 2X - 8)$.

On obtient $P = (X-1)^2(X-2)(X+4)$, donc les racines de P sont 1, 2, 4, d'ordre de multiplicité respectifs 2, 1, 1.

D'après le théorème cité par l'énoncé les solutions de l'équation proposée sont les fonctions y définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = (\alpha t + \beta)e^t + \gamma e^{2t} + \delta e^{-4t} \qquad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4.$$

Sans utiliser le théorème, on peut résoudre l'équation en appliquant le résultat de la question (5).

Comme $(X-1)^2$ et Q sont premiers entre eux alors $E_P = E_{(X-1)^2} \oplus E_Q$.

On sait résoudre les équations $\mathscr{E}_{(X-1)^2}$ et $\mathscr{E}_Q$:

$$\mathscr{E}_{(X-1)^2} : \quad y'' - 2y' + y = 0 \qquad\qquad \mathscr{E}_Q : \quad y'' + 2y' - 8y = 0.$$

Les solutions de l'équation $\mathscr{E}_P$ sont les sommes d'une solution de $\mathscr{E}_{(X-1)^2}$ et d'une solution de $\mathscr{E}_Q$.