Corrigé du Devoir à la Maison n°12

1. (a) Comme A et M sont deux matrices carrées de taille (n,n) alors $AM - MA$ est définie et c'est une matrice de taille (n,n). Ainsi, pour tout $M \in E$, $f(M)$ est définie et $f(M) \in E$, donc f est une application de E dans E.

   Montrons qu'elle est linéaire grâce à la caractérisation des applications linéaires.

   Soit M et N deux éléments de E et λ un réel. Par distributivité de la multiplication des matrices par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned} f(M+\lambda N) &= A(M+\lambda N) - (M+\lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - MA - \lambda MA \\ &= (AM - MA) + \lambda(AN - NA) \\ &= f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

   Ceci étant vrai pour tout $(M,N) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application f est linéaire.

   Finalement f est une application linéaire de E dans E donc f est un endomorphisme de E.

   (b) Pour toute matrice M de E :

$$f(M) = 0_E \iff AM - MA = 0_E \iff AM = MA$$

   Le noyau de f est donc :

$$\ker f = \{M \in E \mid f(M) = 0_E\} = \{M \in E \mid AM = MA\}$$

   Il s'agit du commutant de A : $\ker f = C(A)$.

   Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de son ensemble de départ donc $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (c) <u>Méthode 1</u>. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

   (i) Si M est une matrice de Z, alors elle commute avec toutes les autres matrices de E, donc *a fortiori* elle commute avec A, et donc elle appartient à $C(A)$. Ainsi $Z \subseteq C(A)$.

   (ii) La matrice nulle 0_E appartient à Z car elle commute avec toutes les matrices : $0_E N = 0_E = 0_E N$ pour toute matrice N.

   (iii) Soit M et M' deux matrices de Z et λ un réel.

   Alors pour tout matrice N de E on a $MN = NM$ et $M'N = NM'$.

   Par distributivité de la multiplication matricielle :

$$(\lambda M + M')N = \lambda MN + M'N = \lambda NM + NM' = N(\lambda M + M')$$

   Ainsi $\lambda M + M'$ commute avec toutes les matrices de E, donc appartient à Z.

   Nous avons démontré que Z est stable par combinaison linéaire.

   Les trois points ci-dessus montrent que Z est un sous-espace vectoriel de $C(A)$.

Méthode 2. Une matrice M appartient à Z si et seulement si elle commutent avec toutes les matrices de E, donc si et seulement si elle appartient à tous les commutants :

$$Z = \bigcap_{N \in E} C(N).$$

Il a été démontré dans la question précédente que $C(N)$ est un sous-espace vectoriel de E pour tout $N \in E$. L'intersection de plusieurs sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, donc Z est un sous-espace vectoriel de E.

De plus $C(A)$ est l'un des $C(N)$, donc $Z \subseteq C(A)$, et ainsi Z est un sous-espace vectoriel de $C(A)$.

2. (a) Par définition de G la famille (I_2, A) est génératrice de G. De plus elle est libre, car pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$:

$$\lambda_1 I_2 + \lambda_2 A = 0_E \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 + a\lambda_2 & b\lambda_2 \\ c\lambda_2 & \lambda_1 + d\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \text{car} \quad c \neq 0$$

Ainsi la famille (I_2, A) est une base de G.

Elle est de cardinal 2 donc G est de dimension 2.

(b) Les matrices I_2 et A commutent avec A, car $AI_2 = A = I_2 A$ et $AA = A^2 = AA$. Donc elles appartiennent à $C(A)$.

Comme $C(A)$ est un sous-espace vectoriel alors il est stable par combinaisons linéaires, donc Vect (I_2, A) est inclus dans $C(A)$, ce qui donne bien $G \subseteq C(A)$.

3. (a) On obtient :

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Soit λ_1 et λ_2 deux réels. Alors :

$$\lambda_1 f(E_{11}) + \lambda_2 f(E_{12}) = 0_E \implies \begin{pmatrix} -c\lambda_2 & -b\lambda_1 + (a-d)\lambda_2 \\ c\lambda_1 & c\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies c\lambda_1 = c\lambda_2 = 0$$

Comme c est non-nul ceci implique que λ_1 et λ_2 sont nuls.

La famille $(f(E_{11}), f(E_{12}))$ est donc libre, *i.e.,* les matrices $f(E_{11})$ et $f(E_{12})$ sont linéairement indépendantes.

(b) Par définition le rang de f est la dimension de l'image de f. Or les matrices $f(E_{11})$ et $f(E_{12})$ appartiennent à l'image de f.

La famille $(f(E_{11}), f(E_{12}))$ est une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{im} f$. Par propriété une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n contient *au plus* n vecteurs, donc $\operatorname{im} f$ est de dimension supérieure ou égale à 2.

On a démontré que : $\operatorname{rg} f \geqslant 2$.

4. On sait que E est de dimension $2 \times 2 = 4$, donc de dimension finie.
   D'après le théorème de rang, comme f est linéaire, d'espace de départ E de dimension finie, alors :
$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim E$$
   On sait que $C(A) = \ker f$ et que E est de dimension 4 donc :
$$\dim C(A) + \operatorname{rg} f = 4$$
   De plus on vient de voir que $\operatorname{rg} f \geqslant 2$, donc :
$$\dim C(A) = 4 - \operatorname{rg} f \leqslant 2$$
   Or on a vu dans la question (2) que $G \subseteq C(A)$ et $\dim G = 2$, donc :
$$2 \leqslant \dim C(A) \leqslant 2$$
   Par antisymétrie : $\dim C(A) = 2$
   Ainsi $G \subseteq C(A)$ et $\dim G = \dim C(A)$ donc par théorème $C(A) = G$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice A^n appartient à $C(A)$ car $AA^n = A^{n+1} = A^n A$.
   Comme $C(A) = G$ alors d'après la question (2a) la famille (I_2, A) est une base de $C(A)$.
   Donc il existe un unique couple de réels (α_n, β_n) tel que $A^n = \alpha_n I_2 + \beta_n A$.
   Ces réels sont les coordonnées de A_n dans la base (I_2, A).
6. (a) Nous avons calculé que $f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.
   Cette matrice est non-nulle car c est non-nul. Donc $AE_{11} \neq E_{11}A$.
   La matrice A ne commute donc pas avec toutes les matrices, donc elle n'appartient pas à Z.
   Comme Z est un sous-espace vectoriel de $C(A)$ alors $\dim Z \leqslant \dim C(A)$, donc $\dim Z \leqslant 2$.
   Si $\dim Z = 2$ alors $\dim Z = \dim C(A)$ avec $Z \subseteq C(A)$ ce qui par théorème implique que $Z = C(A)$. Or A appartient à $C(A)$ mais A pas à Z.
   Cette contradiction montre que $\dim Z \neq 2$, et donc $\dim Z < 2$.
   La dimension étant un entier on en déduit que $\dim Z \leqslant 1$.
   (b) La matrice identité commute avec toute matrice de E : pour toute matrice N de E on a $I_2 N = N = N I_2$. Donc I_2 appartient à Z.
   Comme Z est un sous-espace vectoriel de $C(A)$ alors Z est stable par combinaison linéaire donc $\operatorname{Vect}(I_2) \subseteq Z$.
   Comme I_2 est une matrice non-nulle alors $\operatorname{Vect}(I_2)$ est une droite vectorielle, donc elle est de dimension 1.
   Comme $\operatorname{Vect}(I_2) \subseteq Z$ alors $\dim \operatorname{Vect}(I_2) \leqslant \dim Z$, donc $1 \leqslant \dim Z$.
   D'après la question précédente $\dim Z \leqslant 1$, donc $\dim Z = 1$.
   Finalement $\operatorname{Vect}(I_2) \subseteq Z$ et $\dim \operatorname{Vect}(I_2) = \dim Z$, donc $Z = \operatorname{Vect}(I_2)$.
   Ainsi les matrices qui commutent avec toutes les autres sont les homothéties, *i.e.*, les matrices λI_2 avec $\lambda \in \mathbb{K}$.