

Corrigé partiel du T. D. B7
Polynômes

① Calculer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

a. $A = X^3 + 3X^2 + X - 3$ $B = X + 5$

b. $A = 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1$ $B = 2X^2 + 1$

c. $A = 3X^2 + 6X + 5$ $B = iX + 1 + i$

a. On obtient : $Q = X^2 - 2X + 11$ $R = -58$

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 3X^2 + X - 3 & X + 5 \\ \underline{X^3 + 5X^2} & \\ -2X^2 & \\ \underline{-2X^2 - 10X} & \\ 11X & \\ \underline{11X + 55} & \\ -58 & \end{array}$$

b. On obtient : $Q = X^2 + 2X - \frac{1}{2}$ $R = -7X + \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1 & 2X^2 + 1 \\ \underline{2X^4 + X^2} & \\ 4X^3 - X^2 & \\ \underline{4X^3 + 2X} & \\ -X^2 - 7X & \\ \underline{-X^2 - \frac{1}{2}} & \\ -7X + \frac{3}{2} & \end{array}$$

c. On obtient : $Q = -3iX + (3 - 3i)$ $R = -1$

$$\begin{array}{r|l} 3X^2 + 6X + 5 & iX + 1 + i \\ \underline{3X^2 + (3 - 3i)X} & \\ (3 + 3i)X & \\ \underline{(3 + 3i)X + 6} & \\ -1 & \end{array}$$

② L'algorithme de Hörner évalue un polynôme de degré n en un scalaire x grâce à la formule :

$$P(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_0)$$

- Programmer l'algorithme de Hörner en Python.
- Compter le nombre d'opérations nécessaires pour spécialiser un polynôme de degré n avec cet algorithme, puis avec l'algorithme naïf. Comparer ces deux méthodes.

```
def Specialisation(P,x):
```

```
    """Évalue le polynôme P en x en
        utilisant l'algorithme de Hörner."""
    y=P[-1]
    for k in range(len(P)-2,-1,-1):
        y*=x
        y+=P[k]
    return y
```

On obtient pour complexités $2n$ et $\frac{n(n+3)}{2}$, donc en $O(n)$ et $O(n^2)$ respectivement, ce qui montre que l'algorithme de Hörner est plus efficace en temps.

③ Soit $P = X^7(X - 3)^3$.

Calculer $P^{(9)}$ en utilisant la formule de Leibniz.

On obtient $P^{(9)} = 10!X - 3 \times 9!$, ce qui se vérifie directement.

④ Appliquer la formule de Taylor pour

- $P = 2X^2 + 7X + 7$ en $a = -2$
 - $Q = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ en $a = 3$
- Résoudre l'équation : $Q(X) = 0$

a. $P = 1 - (X + 2) + 2(X + 2)^2$

b. $P = (X + 3)^3 - (X + 3)$

On calcule $P = (X + 2)(X + 3)(X + 4)$, donc les racines sont 2, 3 et 4.

⑤ Résoudre l'équation :

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 12x = 0$$

$$P = X(X - 2)(X^3 + X^2 - 4X + 6) = X(X - 2)(X + 3)(X^2 - 2X + 2)$$

Les racines sont 0, 2, -3 , $1 + i$ et $-i$.

⑥ Factoriser :

$$P = 2X^6 + 7X^5 + X^4 - 14X^3 - 8X^2 + 7X + 5$$

Pour ceci, trouver deux racines évidentes et déterminer leurs ordres de multiplicité.

On obtient $P = (X - 1)^2(X + 1)^3(2X + 5)$.

⑦ Résoudre le système :

$$\begin{cases} xy = 24 \\ x^2 + y^2 = 73 \end{cases}$$

Le système implique $(x + y)^2 = 73 + 2 \times 24 = 121$, donc $x + y = \pm 11$.

Ainsi x et y sont les racines des polynômes $X^2 \pm 11X + 24$

Solutions : $\{3, 8\}$ et $\{-3, -8\}$

⑧ En considérant le polynôme unitaire dont x, y, z sont les racines, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = -16 \\ xyz = 20 \end{cases}$$

x, y, z sont les racines de $P = X^3 + X^2 + 6X - 20 = (X + 2)(X^2 - 3X - 10)$.

Les solutions sont $\{x, y, z\} = \{-2, -2, 5\}$.

⑨ Factoriser le polynôme :

$$P = X^3 - (1 + 6i)X - (6 - 2i)$$

On obtient $P = (X - i)(X^2 + iX - (2 + 6i)) = (X - i)(X - 2 - i)(X + 2 + 2i)$.

⑩ Calculer le PGCD de A et B dans les cas suivants :

- a. $A = X + 2$ $B = 6X + 11$
 b. $A = 4X^2 - 1$ $B = 2X^2 + 5X - 3$
 c. $A = 2X^3 - X^2 - X - 3$ $B = 4X^2 + 4X - 15$
 d. $A = X^n - \alpha^n$ $B = (X - \alpha)^n$
 avec $(\alpha, n) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{N}^*$

- a. 1 b. $X - \frac{1}{2}$ c. $X - \frac{3}{2}$ d. $X - \alpha$

⑪ Déterminer des coefficients de Bézout pour :

$$A = (X - 4)(X - 1) \quad \text{et} \quad B = (X - 2).$$

$U = -\frac{1}{2}$ et $V = \frac{1}{2}(X - 3)$ conviennent.

⑫ Soit A, B, C trois polynômes non-nuls avec C unitaire.

Démontrer que $(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C$.

On utilise $(A \vee B)\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$.

Il faut justifier que si $P\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X]$ alors P et Q sont associés.

On obtient que $(AC) \vee (BC)$ et $(A \vee B)C$ sont associés. Comme ils sont unitaires alors ils sont égaux.

1 Donner la forme développée du polynôme P puis la forme factorisée du polynôme Q avec :

$$P = (X^3 + X^2 + X + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$$

$$\text{et } Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} X^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{n+2}{k+1} X^k$$

On obtient $P = 1 + X^2 + X^{2n+1} + X^{2n+3}$ et $Q = (X + 1)^{n+1}$.

2 Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

a. $A = X^6 + 1 \quad B = X^3 + X^2 + X + 1$

b. $A = 2X^4 - 11X^3 + 7X^2 + 6X - 2$
 $B = 2X^2 - 5X + 2$

c. $A = X^{20} - 2X^{15} + 3X^{10} - 4X^5 + 5$
 $B = X^7 + X^2$

d. $A = X^5 + iX^4 \quad B = X^2 + 1$

e. $A = 2X^3 - (1+i)X^2 - iX - (1-i)$
 $B = iX + 1$

a. $Q = X^3 - X^2 \quad R = X^2 + 1$

b. $Q = X^2 - 3X - 5 \quad R = -13X + 8$

c. $Q = X^{13} - 3X^8 + 6X^3 \quad R = -10X^5 + 5$

d. $Q = X^3 + iX^2 - X - i \quad R = X + i$

e. $Q = -2iX^2 + (1+i)X + (i-2) \quad R = 1$

3 Soit n un entier naturel, θ , a , b trois scalaires avec $a \neq b$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a. X^n par $(X - a)$, puis par $(X - a)(X - b)$, puis par $(X - a)^2$

b. $((\sin \theta)X + \cos \theta)^n$ par $X^2 + 1$

c. $X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 + X + 1$

a. Les restes sont respectivement :

- $R_n = a^n$ (spécialiser en a)

- $R_n = \frac{1}{a-b}[(a^n - b^n)X - (ba^n - ab^n)] = \frac{1}{a-b}[a^n(X - b) - b^n(X - a)]$
 (Spécialiser en a et en b)

- $R_n = a^{n-1}[nX + (1-n)a] = na^{n-1}(X - a) + a^n$

(Spécialiser en a , dériver, spécialiser en a . Ou utiliser la formule de Taylor).

b. $R_n = (\sin(n\theta)X + \cos(n\theta))$ (spécialiser en $\pm i$).

c. $R_n = 3$ si n est multiple de 3, 0 sinon (spécialiser en j et j^2).

4 On définit la fonction f sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6x + 13}$$

Grâce à une division euclidienne :

- Démontrer que f possède une asymptote en $\pm\infty$ et en donner une équation.
- Calculer une primitive de f .

a. La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne :

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{2x + 70}{x^2 + 6x + 13}$$

La droite d'équation $y = 2x - 5$ est donc asymptote à la courbe.

b. On obtient : $F(x) = x^2 - 5x + \ln(x^2 + 6x + 13) + 32 \arctan \frac{x+3}{2}$

5 Soit a, b deux réels et n un entier naturel. Soit $R = PQ$ avec :

$$P = (X - a)^n \quad \text{et} \quad Q = (X - b)^n$$

- Donner $P^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $R^{(n)}$. Simplifier son expression dans le cas où $a = b$.

c. En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Obtient : $\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \right)^2 = \binom{2n}{n}$

6 On considère les polynômes :

$$A = X^9 - X^8 - 4X^7 + 7X^6 + X^5 - 10X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 4X + 1$$

$$B = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$$

Factoriser B et démontrer qu'il divise A .

$B = (X - 1)^3(X + 1)^2$, 1 est bien racine triple de A et -1 est bien racine double de A .

7 Déterminer un polynôme P de degré minimal tel que $P+10$ soit divisible par $(X-2)^2$ et $P-12$ soit divisible par $(X+2)^2$.

On obtient $P = \frac{11}{16}X^3 - \frac{33}{4}X + 1$.

8 À quelle condition nécessaire et suffisante sur (λ, μ) le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $(X+2)^2$?

On obtient $\lambda = -\frac{15}{2} \quad \mu = -10$

Le quotient est alors $Q = X^2 - 3X + (\lambda + 8)$.

9 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

$$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$$

$$P_2 = X^4 + X^2 - 6$$

$$P_3 = X^7 - 125X^4 - 16X^3 + 2000$$

$$P_4 = 2X^3 - 2X^2 - 9X - 9$$

$$P_5 = (X^2 + X - 4)^2 + (X - 7)^2$$

$$P_6 = X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$$

$$P_1 = (X + i)(X - 1 - i)(X - i)(X - 1 + i)$$

$$= (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

$$P_2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - i\sqrt{3})(X + i\sqrt{3})$$

$$= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 3)$$

$$P_3 = (X - 2)(X + 2)(X - 2i)(X + 2i)(X - 5)(X - 5j)(X - 5j^2)$$

$$= (X - 2)(X + 2)(X^2 + 4)(X - 5)(X^2 + 5X + 25)$$

$$P_4 = 2(X - 3)(X + 1 - \frac{i}{\sqrt{2}})(X + 1 + \frac{i}{\sqrt{2}})$$

$$= 2(X - 3)(X^2 + 2X + \frac{3}{2})$$

$$P_5 = (X - 2 + i)(X - 2 - i)(X + 3 + 2i)(X + 3 - 2i)$$

$$= (X^2 - 4X + 5)(X^2 + 6X + 13)$$

$$P_6 = (X - 1)^2(X + 3)(X - \frac{1+i\sqrt{7}}{2})(X - \frac{1-i\sqrt{7}}{2})$$

$$= (X - 1)^2(X + 3)(X^2 - X + 2)$$

10 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

$$P_1 = X^6 - 1$$

$$P_2 = X^3 + 1$$

$$P_3 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

$$P_4 = X^4 + X^2 + 1$$

$$P_5 = X^8 - 1$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \prod_k (X - e^{ik\frac{\pi}{3}}) \quad k = 0, \dots, 5 \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= (X + 1)(X + j)(X + j^2) \\ &= (X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= (X + 1)(X - j)(X + j)(X - j^2)(X + j^2) \\ &= (X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= (X - \zeta)(X - \zeta^2)(X - \zeta^4)(X - \zeta^5) \quad \zeta = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5 &= \prod_k (X - e^{ik\frac{\pi}{4}}) \quad k = 0, \dots, 7 \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

11 Soit n un entier strictement supérieur à 2 et :

$$P_n = X^n - nX + 1$$

- Démontrer que P_n n'a que des racines simples.
- Déterminer le nombre de ses racines réelles en fonction de n .

a. $P'_n = nX^{n-1} - n$, ses racines sont les $\zeta \in \mathbb{U}_{n-1}$.
 $P_n(\zeta) = (1 - n)\zeta + 1 \neq 0$

- b. Si n est pair, P_n a deux racines, si n est impair P_n a trois racines.

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $1 + X + X^n$ n'a que des racines simples.

Les racines ζ de P' vérifient $\zeta^{n-1} = \frac{1}{n}$, elles ne peuvent être racines de P .

13 Déterminer tous les polynômes vérifiant :

- $P \circ P = P$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
- $P(X + 1) = P(X)$
- $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$
- $P'^2 = 4P$
- $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$

- X et $a_0 \in \mathbb{K}$
- $P = \lambda(X^2 - 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $P = a_0 \in \mathbb{K}$
- On démontre que $P = X(X + 1)(X + 2)Q$ puis avec la question précédente :
 $P = \lambda X(X + 1)(X + 2)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $P = 0$ ou $P = (X + \alpha)^2$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$
- Chercher le coefficient dominant. On obtient $P = \lambda(X^3 + X)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

14 Soit P un polynôme non-nul vérifiant l'égalité :

$$(E) : P(X^2) = P(X + 1)P(X).$$

- Démontrer que si α est une racine de P alors α^{2^n} est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Démontrer que toute racine non-nulle de P est de module 1.
 - Démontrer que toute racine de P différente de 1 est élément de $1 + \mathbb{U}$.
 - En déduire que seuls 0 et 1 peuvent être racines de P .
 - En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant l'égalité (E).
- Si α est racine alors α^2 est racine, puis α^{2^n} pour tout $n \in \mathbb{N}$. par récurrence.
 - Comme le nombre de racines est fini, alors il existe m et n distincts tels que $\alpha^{2^m} = \alpha^{2^n}$, donc $|\alpha| = 1$.
 - Si α est racine, alors $(\alpha - 1)^2$ est racine, donc nul ou élément de \mathbb{U} . Donc $\alpha - 1$ est élément de \mathbb{U} .
 - Si $e^{i\frac{\pi}{3}}$ est racine, alors j est racine, mais j n'est pas dans $1 + \mathbb{U}$. Donc seuls 0 et 1 sont racines.
 - En posant $P = \lambda X^a(X - 1)^b$, on obtient $\lambda = 0$ ou 1 et $a = b$, donc $P = [X(X - 1)]^a$, ou $P = 0$.

15 Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$$

Utiliser la formule du binôme pour X^n , puis la linéarité.

Sinon on raisonne par récurrence sur $n = \deg P$, en posant $P = a_n X^n + Q$.

On peut aussi appliquer la formule de Taylor.

16 Résoudre l'équation

$$x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$$

sachant que la somme de deux des solutions est égale à la troisième.

On obtient $\mathcal{S} = \{4, 2 \pm i\sqrt{3}\}$.

17 Factoriser le polynôme

$$8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$$

sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

On obtient $P = (2X+1)(2X-1)(2X-3)$.

18 Déterminer tous les réels x, y, z tels que :

$$x + y + z = xy + xz + yz = 3$$

Les scalaires x, y, z sont racines d'un polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 3x + a$ où a est un réel.

On calcule $P = (X-1)^3 + a + 1$.

Les racines complexes sont donc $1 - \sqrt[3]{a+1}$, $1 - j\sqrt[3]{a+1}$, $1 - j^2\sqrt[3]{a+1}$.

Comme x, y, z sont réels alors $a = -1$ obligatoirement donc $x = y = z = 1$.

19 Soit a, b, c trois scalaires et α, β, γ les trois racines du polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

a. Exprimer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ en fonction de a, b, c .

b. Application : résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -29 \end{cases}$$

a. On obtient
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 2b \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a^3 + 3ab - 3c \end{cases}$$

b. $a = -1, b = -14, c = 24$, donc x, y, z , sont les racines de

$$P = X^3 - X^2 - 14X + 24 = (X-2)(X^2 + X - 12)$$

Solutions : $\{x, y, z\} = \{2, 3, -4\}$.

20 Soit A et B deux polynômes.

- Démontrer que : $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$
- Soit C un autre polynôme. A-t-on : $(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C$?

- Inclusion directe : si un polynôme s'écrit $AU + BV$ alors il est multiple de $A \wedge B$.
Inclusion indirecte : utiliser la relation de Bézout.
- En utilisant la question précédente on démontre que les polynômes $(AC) \wedge (BC)$ et $(A \wedge B)C$ sont associés.
Ils sont égaux si et seulement si C est unitaire.

21 Soit m et n deux entiers naturels non-nuls, soit r le reste de la division euclidienne de n par m , et $d = n \wedge m$.

- Soit A, B, C trois polynômes. On suppose qu'il existe un polynôme V tel que $A + BV + C = 0$. Démontrer que $A \wedge B = B \wedge C$.
- Démontrer que $X^m - 1$ divise $X^n - X^r$.
En déduire que $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
- Démontrer que :

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$$

$$\text{puis que } (X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1).$$

- On démontre que $A \wedge B$ et $B \wedge C$ sont diviseurs l'un de l'autre, donc associés, puis ils sont unitaires.
- $X^n - X^r = X^r(X^{qm} - 1)$ et $X^m - 1$ divise $X^{qm} - 1$.
Ensuite $X^n - 1 = X^r(X^{qm} - 1) + X^r - 1$.
- On utilise la question précédente puis l'algorithme d'Euclide.

22 Soit m et n deux entiers naturels non-nuls, et $d = m \wedge n$.

- Soit a un diviseur de n . Justifier que $\mathbb{U}_a \subseteq \mathbb{U}_n$.
- Démontrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d$.
- En déduire que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$.

- Comme a divise n alors : $\zeta^a = 1 \implies \zeta^n = 1$.
- L'inclusion indirecte est conséquence de la question précédente.
L'inclusion directe se démontre grâce à la relation de Bézout.
- On utilise $(X^n - 1) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta)$.
Les racines communes de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ sont les éléments de \mathbb{U}_d .

23 Soit A_1, \dots, A_n une famille de polynômes premiers entre eux deux à deux. Pour tout $k = 1, \dots, n$ on pose :

$$B_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i$$

Démontrer que les polynômes B_1, \dots, B_n sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Soit P irréductible divisant tous les B_k . Alors il divise B_1 , donc il existe $i \neq 1$ tel que P divise A_i .

Mais P divise B_i , donc il existe $j \neq i$ tel que P divise A_j . Donc P divise $A_i \wedge A_j$, ce qui impose $P = 1$.

24 Polynômes de Tchebychev

Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

- Calculer P_n pour n compris entre 0 et 5.
- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n .
- Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(nx) = P_n(\cos x)$$

- Quelles sont les racines du polynôme P_n ?

- $P_2 = 2X^2 - 1$ $P_3 = 4X^3 - 3X$ $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$ $P_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$
- On démontre par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg P_n = n$
- On utilise encore une démonstration par récurrence double.
- Les n racines de P_n sont $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ pour k allant de 0 à $n-1$, donc les cosinus de $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$.

25 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ trois scalaires distincts et :

$$P_0 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

$$P_1 = (X - \alpha_0)(X - \alpha_2)$$

$$P_2 = (X - \alpha_0)(X - \alpha_1)$$

a. Calculer $P_i(\alpha_j)$ pour tous i et j allant de 0 à 2.

Pour tout $i = 0, 1, 2$ on pose : $L_i = P_i/P_i(\alpha_i)$

b. Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}_2[X]$:

$$P = \sum_{i=0}^2 P(\alpha_i)L_i$$

c. Soit $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ trois scalaires. Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus 2 tel que pour tout $i = 0, 1, 2$: $P(\alpha_i) = \beta_i$.

d. Application : déterminer l'unique parabole passant par les points de coordonnées $(-1, 1), (2, 1), (4, 11)$.

a. $P_i(\alpha_j) = 0$ si $i \neq j$, sinon $P_0(\alpha_0) = (\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)$, etc.

b. Par définition des L_i : $L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Posons $Q = \sum_{i=0}^2 P(\alpha_i)L_i$. Alors $Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$ pour $i = 0, 1, 2$.

Le polynôme $P - Q$ est de degré au plus 2 et admet au moins trois racines donc il est nul.

c. Soit $P = \sum_{k=0}^2 \beta_k L_k$. Alors P est de degré au plus 2 et vérifie $P(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i = 0, 1, 2$.

Ceci démontre l'existence.

Si P est un polynôme de degré au plus 2 vérifiant $P(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i = 0, 1, 2$,

alors $P = \sum_{k=0}^2 \beta_k L_k$ d'après la question précédente.

Ceci démontre l'unicité.

d. D'après la question précédente le polynôme $P = L_0 + L_1 + 11L_2$ convient.

On obtient $P = X^2 - X - 1$.