

Feuille d'exercices 4

NOMBRES COMPLEXES

1 - ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Exercice 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

(a) $(3 + 2i)(1 - i)$

(c) $(1 - i)^3$

(e) $\frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$

(b) $\frac{1}{2 - i\sqrt{3}}$

(d) $\frac{4 + 3i}{-2 + 7i}$

(f) $\left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2$

Exercice 2. Soit z dans \mathbb{C}^* . Calculer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Exercice 3. Soit z dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. À quelle condition nécessaire et suffisante le complexe $\frac{z + 1}{z - 1}$ est-il réel ? imaginaire pur ? de module 1 ?

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

(a) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

(c) $z^4 - z^2 + 1 = 0$

(b) $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$

(d) $z + \frac{1}{z} = i\left(\frac{3}{z} - 1\right)$

Exercice 5. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

(a) $1 + i\sqrt{3}$

(c) $1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

(e) -27

(b) $\frac{\sqrt{8}}{1 - i}$

(d) $-4i$

(f) $5 - 5i$

Exercice 6. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

(a) $e^z = \sqrt{3} + i$

(b) $e^{i\pi z} = 1 - i$

(c) $e^{1-z} + e^z = \sqrt{2}e$

Exercice 7. Soit n dans \mathbb{N}^* . Résoudre l'équation : $(z + i)^n = (z - i)^n$.

Exercice 8. Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module.

2 - TRIGONOMÉTRIE

Exercice 9. Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

(a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$

(c) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

(b) $\tan(x) = -\sqrt{3}$

(d) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 10. Résoudre sur \mathbb{R} les systèmes d'équations suivantes :

$$(a) \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{5}}{4} \\ \sin x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 11. Linéariser les expressions suivantes :

$$(a) \cos(2x) \sin^2(x)$$

$$(b) \cos^4(x)$$

$$(c) \cos^2(2x) \sin(4x)$$

$$(d) \cos(x) \cos(2x) \cos(3x)$$

Exercice 12. Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(a) \cos x = \cos 2x$$

$$(b) \sin x = \sin 2x$$

$$(c) \cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(d) \cos x = \sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(e) \tan 3x = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$(f) \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

Exercice 13. Résoudre sur \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$(a) \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$$

$$(b) \cos x > \sin x$$

$$(c) \sin x < \sqrt{3} \cos x$$

$$(d) \cos x + \sin x \geq 1$$

Exercice 14. Soit x un réel. Calculer les sommes suivantes :

$$(a) \sum_{k=0}^n \sin(kx)$$

$$(b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$$

$$(c) \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$$

3 - GÉOMÉTRIE PLANE

Exercice 15. Représenter l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient :

$$(a) -1 < \operatorname{Re}(2z - 1) < 1$$

$$(b) \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(z) + 1) = 1$$

$$(c) |z - i| = |z + i|$$

Exercice 16. Démontrer et interpréter géométriquement l'*identité du parallélogramme* :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Exercice 17. Soit a dans \mathbb{C} . Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z| = 1$ et $|z - a| = 1$.

Exercice 18. Représenter l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient $\operatorname{Im}(z^2) < 1$.

Exercice 19. Déterminer l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.

Exercice 20. Quel est l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que :

1. les points d'affixe z , z^2 et z^4 sont alignés ?
2. les points d'affixe z , $\frac{1}{z}$ et $z - i$ sont alignés ?