

Feuille d'exercices 5

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : FONCTIONS USUELLES

1 - LOGARITHMES, EXPONENTIELLES, PUISSANCES

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

(a) $2^{x^2} = 3^{x^3}$

(c) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

(b) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

(d) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

Exercice 2. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

(a)
$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} xy = a^2 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{5}{2} \ln^2 a \end{cases}$$

2 - CROISSANCES COMPARÉES

Exercice 4. Soient a, b et c des réels strictement positifs. Déterminer les limites, quand $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$, des fonctions suivantes :

(a) $x^a e^{-bx}$

(b) $(\ln x)^a e^{-bx}$

(c) $e^{ax} x^{-b} (\ln x)^{-c}$

Exercice 5. Soit $a > 0$. Déterminer en fonction de a les limites, quand $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$, des fonctions suivantes :

(a) $a^x x^4$

(b) $a^{-x} \sqrt{x}$

(c) $x^{-a} \ln(1 + e^x)$

Exercice 6. Étudier (dérivabilité, variations, limites, graphe) les fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto a^x$ où $a > 0$

(b) $g : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

(c) $h : x \mapsto x^x$

Exercice 7. Déterminer les limites, quand $x \rightarrow +\infty$, des fonctions suivantes :

(a) $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

(b) $\frac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $a > 1$

(c) $\frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1 < a < b$

3 - FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 8. Calculer :

(a) $\sin(\arcsin x)$ où $x \in [-1, 1]$

(c) $\tan(\arcsin x)$ où $x \in [-1, 1]$

(b) $\arcsin(\sin x)$ où $x \in \mathbb{R}$

(d) $\sin(\arctan x)$ où $x \in \mathbb{R}$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

- (a) $2 \cos(2x) = \sqrt{3}$ (e) $\cos 3x + \sin x = 0$
(b) $2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x = -1$ (f) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$
(c) $\sin 2x + \sin x = 0$ (g) $\cos x + \sin x = 2$
(d) $\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$ (h) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$

Exercice 10. Simplifier les expressions suivantes :

- (a) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $\arctan\left(\tan \frac{9\pi}{4}\right)$
(b) $\cos(\arctan x)$ où $x \in \mathbb{R}$ (d) $\tan(\arccos x)$ où $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

- (a) $\arcsin x = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{5}$ (b) $\arctan x = \arctan 3 + \arctan 4$

Exercice 12. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

- (a) $\arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$ (d) $\arcsin x = 2 \arccos x$
(b) $\arccos \frac{x+1}{2} = \arcsin x$ (e) $\arcsin x = \arctan 2x$
(c) $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin x$ (f) $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{2}$

4 - FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

- (a) $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$ (d) $\operatorname{sh} 2x = \operatorname{ch} x$
(b) $\operatorname{ch} x = \frac{5}{3}$ (e) $16 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 15$
(c) $3 \operatorname{ch} 2x - 4 \operatorname{ch} x = 7$ (f) $\operatorname{sh} x + \frac{2}{\operatorname{sh} x} = 3$

Exercice 15. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système :
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b. \end{cases}$$

Exercice 16. Soit (n, x) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Calculer :

- (a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$ (b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$