Corrigé partiel du T. D. A6
Équations différentielles

4 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$y + \ln(ty' + 1) = t$$

avec $y(1) = 1$, en posant $z = e^y$.

Soit $z(t) = e^{y(t)}$. Comme y est supposée dérivable alors z l'est aussi par composition.
De plus $y(t) = \ln z(t)$ et donc : $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad y'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)}$
On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y(t) + \ln\left(ty'(t) + 1\right) = t \qquad &\iff \qquad \ln z(t) + \ln\left(t\frac{z'(t)}{z(t)} + 1\right) = \ln e^t \\ &\iff \qquad tz'(t) + z(t) = e^t \\ &\iff \qquad z'(t) + \frac{1}{t}z(t) = \frac{e^t}{t} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est valide car on suppose que $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc il est non-nul.
Contrairement à l'équation de départ, cette équation est linéaire.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, et $t \mapsto -\ln t$ est une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t}$, alors les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions :

$$\begin{aligned} z_0 : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \lambda e^{-\ln t} = \tfrac{\lambda}{t} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La méthode de variation de la constante nous fournit la solution particulière $z_1 : t \mapsto \frac{e^t}{t}$.
Ainsi les solutions de l'équation d'inconnue z sont les fonctions $z = z_0 + z_1$, à savoir :

$$z(t) = \frac{\lambda + e^t}{t} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Comme $y(t) = \ln z(t)$ alors les solutions de l'équation de départ sont les fonctions telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad y(t) = \ln\left(\lambda + e^t\right) - \ln t \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(1) = 1$ donne $\ln(\lambda + e) = 1$ donc $\lambda = 0$.
Finalement la solution de l'équation proposée munie de sa condition initiale est :

$$\boxed{y(t) = t - \ln t}$$

$\boxed{5}$ Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer qu'il existe une unique fonction dérivable f de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in I \qquad f'(t) = \frac{f(t)}{\cos t}$$

La calculer grâce au changement de variable $u = \sin x$.

La condition demandée signifie que f est solution sur I de l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{\cos t} y = 0 \tag{1}$$

Il s'agit du problème de Cauchy : I est un intervalle, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est définie et continue sur cet intervalle, et la condition initiale est du type $y(t_0) = y_0$ avec $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Ainsi cette équation différentielle munie de sa condition initiale admet une et une seule solution.
Pour la déterminer il faut résoudre l'équation différentielle.
Celle-ci est homogène. On note $a(t) = \frac{1}{\cos t}$ pour tout $t \in I$, puis on pose :

$$\forall t \in I \qquad A(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$$

La fonction a est continue et I est un intervalle donc le théorème fondamental montre que A est une primitive de a.
La fonction $u \mapsto \sin u$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En posant $x = \sin u$ on obtient $\frac{dx}{du} = \cos u$, donc $dx = \cos u\, du$. En appliquant le changement de variable il vient :

$$A(t) = \int_0^t \frac{\cos u \,\mathrm{d}u}{1 - \sin^2 u} = \int_0^{\sin t} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right)$$

et on en déduit

$$\forall t \in I \qquad A(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}$$

On remarque que pour tout $t \in I$:

$$A(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin^2 t}{(1 - \sin t)^2} = \ln \sqrt{\frac{\cos^2 t}{(1 - \sin t)^2}} = \ln \frac{\cos t}{1 - \sin t}$$

Ceci car $\cos t$ et $(1 - \sin t)$ sont positifs sur I.
Finalement les solutions de l'équation (1) sont les fonctions

$$\begin{aligned} y_0 : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \lambda e^{A(t)} = \lambda \tfrac{\cos t}{1 - \sin t} \end{aligned} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

La condition initiale $f(0) = 1$ donne $\lambda = 1$, et donc la fonction recherchée est :

$$\boxed{f(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin t}}$$

Cette fonction s'écrit aussi $f(t) = \frac{1+\sin t}{\cos t}$.

7 Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

On note $\mathcal{P}$ la propriété : $\quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$

La fonction f est dérivable, donc pour composition, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $x \mapsto f(xy)$ est dérivable, et sa dérivée est $x \mapsto yf'(xy)$. Si la propriété $\mathcal{P}$ est vraie alors par dérivation par rapport à x elle implique :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad yf'(xy) = f'(x)$$

Cette relation est vraie *a fortiori* si $y = \frac{1}{x}$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{1}{x} f'(1) = f'(x)$$

Posons $a = f'(1)$. Alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{a}{x}$
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors par primitivation il existe un réel b tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = a \ln x \ + b$$

Cette phase d'analyse nous a montré que si une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie la propriété $\mathcal{P}$ alors il existe deux réels a et b tels que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = a \ln x + b$.
Dans ce cas la propriété $\mathcal{P}$ s'écrit :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad a \ln(xy) + b = a \ln x + b + a \ln y + b$$

Ceci donne $b = 0$.
Cette phase de synthèse nous montre que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto a \ln x$, où a est un réel.

10 Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2)f(x) - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Analyse :
Soit f une fonction solution.
Posons $g(x) = xf(x)$. Alors g est continue et la fonction $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ en est une primitive, d'après le théorème fondamental. Elle est donc dérivable, de dérivée g.
Par hypothèse la fonction f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x^2)f(x) - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2xf(x) + (1+x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x^2)f(x) + xf(x) = 0.$$

Ceci montre que f est solution de l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' + xy = 0.$$

En posant $a(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ et $A(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ on justifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Synthèse :
Soit $fx \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ où λ est un réel.
On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x^2)f(x) - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \lambda.$$

On en déduit que f est solution du problème si et seulement si $\lambda = 1$.
Finalement la seule solution du problème est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

11 Déterminer l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(-x)$$

Notons $\mathcal{P}$ la propriété ; $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$
Soit f une fonction deux fois dérivable vérifiant cette propriété. Alors par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = -f'(-x)$$

Or la propriété $\mathcal{P}$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x appartient à $\mathbb{R}$ alors $-x$ appartient à $\mathbb{R}$, donc on peut substituer $-x$ à x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi on en déduit
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = -f(x)$$
Ceci montre que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
Or les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A\cos t + B\sin t \end{array} \qquad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi, si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifie la propriété $\mathcal{P}$ alors elle est de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$ où A et B sont deux constantes réelles.
Mais dans ce cas la condition $\mathcal{P}$ s'écrit :

$$\begin{array}{rll} & \forall x \in \mathbb{R} & -A\sin x + B\cos x = A\cos x - B\sin x \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R} & (B - A)(\cos x - \sin x) = 0 \end{array}$$

Ceci équivaut à l'égalité $A = B$.
Ainsi l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto A(\cos x + \sin x)$, où A est un réel.

12 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

d'inconnues x et y, fonctions de t, vérifiant les conditions initiales $x(0) = 3$ et $y(0) = 0$.

Après manipulation on obtient que la fonction x vérifie :

$$x'' + x' - 2x = 0.$$

On en déduit $x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, puis $y(t) = \frac{\alpha}{2}e^t + 2\beta e^{-2t}$.
Les conditions initiales donnent : $x(t) = 4e^t - e^{-2t}$ et $y(t) = 2e^t + 2e^{-2t}$.

13 Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 8$.

On remarque que l'équation différentielle proposée s'écrit :

$$(y' - 2y)'' - 4(y' - 2y) = 0$$

On pose $z = y' - 2y$. Alors y est solution de l'équation proposée si et seulement si z est solution de l'équation :
$$z'' - 4z = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle du second ordre sont les fonctions $z : t \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}$, où α et β sont deux réels.
De plus les conditions initiales sur y donnent les conditions initiales sur z :

$$z(0) = y'(0) - 2y(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad z'(0) = y''(0) - 2y'(0) = 6$$

Comme $z(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}$ alors $z'(t) = 2\alpha e^{2t} - 2\beta e^{-2t}$. Les conditions initiales sur z donnent :

$$\begin{cases} z(0) = -1 \\ z'(0) = \ \ 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \ \beta = -1 \\ 2\alpha - 2\beta = \ \ 6 \end{cases}$$

On en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = -2$, et donc $z(t) = e^{2t} - 2e^{-2t}$.
Or par définition $z = y' - 2y$, donc on calcule y en résolvant l'équation différentielle du premier ordre :

$$(E) \qquad y' - 2y = e^{2t} - 2e^{-2t}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonction $y_0 : t \mapsto \lambda e^{2t}$ où λ est un réel. Ceci par on résout cette équation sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et car la fonction $t \mapsto 2t$ est une primitive de la fonction $t \mapsto 2$.
Pour déterminer une solution particulière de l'équation (E) on définit les deux équations suivantes :

$$(E_1) \qquad y' - 2y = e^{2t} \qquad\qquad (E_2) \qquad y' - 2y = -2e^{-2t}$$

On obtient les solutions particulières respectives $y_1(t) = te^{2t}$ et $y_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}$.
D'après le principe de superposition la fonction $y_3 = y_1 + y_2$ est solution de l'équation (E), puis les fonctions $y = y_0 + y_3$ sont les solutions de l'équation (E). On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = (t + \lambda)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(0) = 1$ montre que $\lambda = \frac{1}{2}$. Finalement la solution de l'équation de départ munie de ses conditions initiales est :

$$\boxed{y(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} = te^{2t} + \mathrm{ch}(2t)}$$

Remarque : Il est possible aussi de résoudre cet exercice en posant $z = y'' - 4y$.

14 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$t^3 y'' - 2ty = 6$$

munie des conditions initiales $y(1) = y'(1) = -1$.
On posera $z(x) = y(e^x)$.

On montre que y est solution si et seulement si z est solution de l'équation :

$$z'' - z' - 2z = 6e^{-x}$$

Ceci donne $z(x) = (\alpha - 2x)e^{-x} + \beta e^{2x}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
On en déduit $y(t) = \frac{\alpha + \ln t}{t} + \beta t^2$.
Avec les conditions initiales : $y(t) = -\frac{1 + 2\ln t}{t}$