

Concours blanc, épreuve de mathématiques

PCSI, Bellevue, 2022-2023

L'usage de la calculatrice est interdit.

Il est demandé de rendre 4 copies, une pour chaque partie. Ces copies doivent être indépendantes car elles seront séparées pour la correction. Si jamais une partie n'est pas traitée, il est quand même demandé de rendre une copie blanche correspondant à cette partie.

Les copies doivent être convenablement présentées. L'écriture, l'orthographe et la rédaction doivent être soignées. Aucune abréviation n'est autorisée dans la copie. Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté. Sauf mention explicite, les réponses doivent être justifiées. Les résultats essentiels peuvent être encadrés ou soulignés. Il ne faut pas oublier que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question.

PARTIE I : RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Dans ce problème, on ne considère que des fonctions solutions à valeurs réelles.

1. (a) Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$z''(x) + z(x) = 0.$$

On notera $\mathcal{S}_1$ cet ensemble.

- (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $k : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction k .
- (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la fonction $h : x \mapsto \frac{k(x)}{\sqrt{x}}$ admette une limite finie en 0. Dans ce cas, et si h n'est pas la fonction nulle, déterminer un équivalent simple de h en 0.
2. On considère l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y(x) = 0.$$

- (a) Soit f une fonction définie et 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $g : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si g est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera $\mathcal{S}$ cet ensemble.
- (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) prolongeables par continuité en 0. On notera $\tilde{\mathcal{S}}$ cet ensemble.
- (d) Parmi les solutions de (E) prolongeables par continuité en 0, lesquelles ont un prolongement par continuité dérivable en 0 ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. (a) Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$.
- (c) Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

2. (a) Démontrer que $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) \leq x \leq \ln(\frac{1}{1-x})$.
- (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.
- (c) Démontrer que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = S_n - \ln(n+1)$.
- (a) Étudier les variations de la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire qu'elle converge. Sa limite est notée γ et est appelée la constante d'Euler.
- (b) En déduire que

$$S_n = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

4. (a) Montrer que les suites extraites $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers une même limite notée ℓ .
- (b) Démontrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ .
- (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - A_{2n} = S_n$.
- (d) Déterminer la valeur de

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k}.$$

5. (a) i. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + 3b_n + \frac{3n^2 + 5n}{2}.$$

- ii. En déduire l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de b_n , puis vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{b_n} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.$$

- iii. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = S_{2n+1} - \frac{1}{2}S_n - 1.$$

- iv. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{B}_n = 18S_n + 6S_{n+1} - 24S_{2n+1} + 18.$$

- (b) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{B}_n = 18 - 24\ell.$$

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E . On rappelle que l'on note $f^0 = \text{id}_E$ l'endomorphisme identité de E et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_p \text{ fois}$.

On étudie la question de savoir s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Ker}(f^p)$ et $\text{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E , et s'il y a lieu, de déterminer le plus petit tel entier que l'on notera p_0 .

L'étude proposée n'est pas complète et n'aborde que des cas où la réponse est positive. Elle s'intéresse en premier et second temps à des exemples. En dernier, elle permet d'établir la démonstration dans le cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie.

1. On étudie quelques premiers cas pour lesquels la réponse est positive.
 - (a) On suppose que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminer p_0 .
 - (b) On suppose que $f = \text{id}_E$. Déterminer p_0 .
 - (c) On suppose que f est bijectif. Déterminer p_0 .
 - (d) On suppose que f est un projecteur. Déterminer p_0 .
 - (e) On suppose que f est une symétrie. Déterminer p_0 .

2. On étudie le cas très particulier où $E = \mathbb{R}^4$ et, en notant $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(e_1) = e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + e_4, \quad f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}, \quad f(e_4) = -e_3.$$
 - (a) Sans les calculer, montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ ne sont pas en somme directe.
 - (b) Déterminer f c'est-à-dire, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, déterminer $f((x, y, z, t))$.
 - (c) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
 - (d) Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, déterminer $f^2(e_k)$ et $f^3(e_k)$.
 - (e) Déterminer p_0 .

3. On se place dans la situation où le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est de dimension finie non nulle et où f est différent de l'endomorphisme nul.
 - (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inclusion $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$.
 - (b) En raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^{m+1})$. Soit m_0 le plus petit tel entier.
 - (c) Démontrer que pour tout $k \geq m_0$, $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$.
On en déduit par récurrence que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker}(f^{m_0}) = \text{Ker}(f^{m_0+q})$ mais on ne demande pas de démontrer cette conséquence.
 - (d) Montrer que $\text{Im}(f^{m_0})$ et $\text{Ker}(f^{m_0})$ sont en somme directe.
 - (e) A l'aide d'arguments de dimension, en déduire que $\text{Im}(f^{m_0})$ et $\text{Ker}(f^{m_0})$ sont supplémentaires dans E .
 - (f) Montrer que m_0 est le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Ker}(f^p)$ sont supplémentaires dans E c'est-à-dire que $p_0 = m_0$.

Motivation :

Considérons un tétraèdre régulier, et notons h sa hauteur. Considérons d'autre part un prisme droit de même base que le tétraèdre et de hauteur $h/3$. On sait depuis Euclide que ces deux polyèdres ont le même volume. On s'intéresse alors à la question suivante : peut-on découper le tétraèdre en un nombre fini de morceaux et les recomposer pour obtenir le prisme ?

Il est possible de répondre à cette question en s'intéressant aux angles des deux polyèdres : ceux du prisme sont des multiples rationnels de π , alors que ceux du tétraèdre sont tous égaux à $\arccos(1/3)$. Nous allons montrer que cet angle n'est pas un multiple rationnel de π , ce qui implique que la réponse à notre question est négative. Il n'est pas demandé de montrer ce dernier point, ni d'étudier les polyèdres.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Le théorème de factorisation des entiers en produits de nombres premiers assure que ($N = 1$) ou (N est divisible par un nombre premier impair) ou (N est une puissance de 2).

On pose $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. On a $\alpha \in [0, \pi]$ et donc $\frac{\alpha}{\pi} \in [0, 1]$. On va montrer l'équivalence :

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}\right) \Leftrightarrow (N \in \{1, 2, 4\}).$$

1. Vérifier que si $N \in \{1, 2, 4\}$, alors $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$.
2. On suppose que $N \notin \{1, 2, 4\}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = N^{\frac{n}{2}} \cos(n\alpha)$.
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - Na_n$.
 - (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$.
 - (c) On suppose que N est divisible par un nombre premier impair que l'on note p . Par définition, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $N = pq$.
 - i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas a_n .
 - ii. Supposons que $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{k}{\ell}$. Montrer que $a_{2\ell} = N^\ell$. Conclure.
 - (d) On suppose que N est une puissance de 2. Alors, comme $N \neq 2$ et $N \neq 4$, il existe $m > 2$ tel que $N = 2^m$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$.
 - i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = b_{n+1} - 2^{m-2}b_n$.
 - ii. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, b_n est impair.
 - iii. Supposons que $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{k}{\ell}$. Montrer que $b_{2\ell} = 2^{(m-2)\ell+1}$. Conclure.
3. Conclure.