Concours blanc, épreuve de mathématiques

PCSI, Bellevue, 2022-2023

Partie I : Résolution d'une équation différentielle

1. (a) L'équation différentielle (E_1) est linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène. L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$ dont les deux solutions complexes non réelles sont $i=0+i$ et $-i=0-i$. Par conséquent, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_1 & = & \left\{ \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \text{avec} \quad A,B\in\mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{0\times x}(A\cos(x)+B\sin(x)) & \end{array} \right\} \\ & = & \left\{ \begin{array}{ccll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \text{avec} \quad A,B\in\mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x)+B\sin(x) & \end{array} \right\} \end{array}$$

(b) Les développements limités à l'ordre 1 en 0 des fonctions cos et sin sont respectivement

$$\begin{array}{rcll} \cos(x) & = & 1+x\,\varepsilon_1(x) & \text{avec} \quad \lim\limits_{x\to0}\varepsilon_1(x)=0 \\ & = & 1+\underset{x\to0}{o}(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \sin(x) & = & x+x\,\varepsilon_2(x) & \text{avec} \quad \lim\limits_{x\to0}\varepsilon_2(x)=0 \\ & = & x+\underset{x\to0}{o}(x) & \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcll} k(x) & = & a\,\cos(x)+b\,\sin(x) & \\ & = & a(1+x\,\varepsilon_1(x))+b(x+x\,\varepsilon_2(x)) & \\ & = & a+b\,x+x\,(a\,\varepsilon_1(x)+b\,\varepsilon_2(x)) & \\ & = & a+b\,x+x\,\varepsilon_3(x) & \text{avec} \quad \lim\limits_{x\to0}\varepsilon_3(x)=\lim\limits_{x\to0}a\,\varepsilon_1(x)+b\,\varepsilon_2(x)=0 \\ & = & a+bx+\underset{x\to0}{o}(x) & \end{array}$$

C'est le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $k:x\mapsto a\cos(x)+b\sin(x)$.

(c) La fonction h est définie sur $]0,+\infty[$ et d'après le développement limité calculé à la question précédente,

$$\begin{array}{rll} \forall x\in]0,+\infty[, & h(x) & \\ = & \frac{k(x)}{\sqrt{x}} & \\ = & \frac{a+b\,x+x\,\varepsilon_3(x)}{\sqrt{x}} & \\ = & \frac{a}{\sqrt{x}}+b\sqrt{x}+\sqrt{x}\,\varepsilon_3(x) & \text{et} \quad \lim\limits_{x\to0}\varepsilon_3(x)=0 \\ = & \frac{a}{\sqrt{x}}+b\sqrt{x}+\underset{x\to0}{o}(\sqrt{x}) & \end{array}$$

Par conséquent,
⋆ si $a>0$, $\lim\limits_{x\to0}h(x)=+\infty$
⋆ si $a=0$, $\lim\limits_{x\to0}h(x)=0$
⋆ si $a<0$, $\lim\limits_{x\to0}h(x)=-\infty$
On peut conclure que la fonction h admet une limite finie en 0 si et seulement si $a=0$.

On suppose maintenant que h admet une limite finie en 0 et est non nulle c'est-à-dire, d'après le résultat précédent que $a=0$ et $b\neq0$. Alors, comme $b\neq0$,

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad h(x)=b\sqrt{x}+\sqrt{x}\,\varepsilon_3(x)=b\sqrt{x}\times(1+\frac{1}{b}\varepsilon_3(x))$$

Or, $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon_3(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to0}1+\frac{1}{b}\varepsilon_3(x)=1$.
On obtient donc que

$$h(x)\underset{x\to0}{\sim}b\sqrt{x}$$

2. (a) D'abord, par hypothèse, la fonction f est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par produit, la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$ est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x) + \sqrt{x}f'(x) \\ g''(x) & = & \frac{f'(x)\times 2\sqrt{x} - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)}{4x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}f'(x) + \sqrt{x}f''(x) \\ & = & \frac{2xf'(x)-f(x)}{4x\sqrt{x}} + \frac{2xf'(x)}{4x\sqrt{x}} + \frac{4x^2 2f''(x)}{4x\sqrt{x}} \\ & = & \frac{4x^2f''(x)+4xf'(x)-f(x)}{4x\sqrt{x}} \end{array}$$

Ensuite, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} & g \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g''(x) + g(x) = 0 & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 4x\sqrt{x}\, g''(x) + 4x\sqrt{x}\, g(x) = 0 & \text{car } 4x\sqrt{x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 4x^2f''(x) + 4xf'(x) - f(x) + 4x^2f(x) = 0 & \text{d'après les calculs précédents} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 4x^2f''(x) + 4xf'(x) + (4x^2-1)f(x) = 0 & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2f''(x) + xf'(x) + (x^2 - \frac{1}{4})f(x) = 0 & \\ \Leftrightarrow & f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* & \end{array}$$

(b) On garde les notations de la question précédente. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \sqrt{x}f(x)$ et $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} & f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* & \\ \Leftrightarrow & g \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* & \text{d'après les équivalences précédentes} \\ \Leftrightarrow & \exists A, B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = A\cos(x) + B\sin(x) & \text{d'après la résolution de } (E_1) \\ \Leftrightarrow & \exists A, B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{\sqrt{x}} & \text{car } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}} \end{array}$$

Cela démontre que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles de l'équation différentielle (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{\sqrt{x}} \end{array} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Soit $s \in \mathcal{S}$ une solution de (E). D'après la résolution, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $s(x) = \frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{\sqrt{x}}$.
En reprenant les résultats de la première question, la fonction s est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $A = 0$ et dans ce cas, elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur $\lim\limits_{x\to 0} s(x) = 0$.
On peut conclure que l'ensemble des solutions de (E) prolongeables par continuité en 0 et

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{B\sin(x)}{\sqrt{x}} \end{array} \quad \text{avec} \quad B \in \mathbb{R} \right\}$$

(d) Soit $t \in \tilde{\mathcal{S}}$ une solution de (E) prolongeable par continuité en 0. D'après la question précédente, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t(x) = \frac{B\sin(x)}{\sqrt{x}}$. Et le prolongement par continuité en 0 de cette fonction, que l'on notera encore t, est la fonction suivante

$$t : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{lll} \frac{B\sin(x)}{\sqrt{x}} & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Le taux d'accroissement de t entre 0 et x est

$$\frac{t(x) - t(0)}{x - 0} = \frac{B\sin(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{B(1 + \varepsilon_2(x))}{\sqrt{x}} \text{ avec } \lim_{x\to} \varepsilon_2(x) = 0$$

Par conséquent,
$\star$ si $B > 0$, $\lim\limits_{x\to} \frac{t(x)-t(0)}{x-0} = +\infty$
$\star$ si $B = 0$, $\lim\limits_{x\to} \frac{t(x)-t(0)}{x-0} = 0$
$\star$ si $B < 0$, $\lim\limits_{x\to} \frac{t(x)-t(0)}{x-0} = -\infty$
On peut conclure que la fonction prolongée t est dérivable en 0 si et seulement si $B = 0$ (et dans ce cas son nombre dérivé en 0 est 0).
Cela démontre que l'unique solution de (E) prolongeable par continuité en 0 dont le prolongement par continuité est dérivable en 0 est la fonction nulle.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} S_{n+1} - S_n & = & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ & = & \frac{1}{n+1} \geq 0, \end{array}$$

donc $S_{n+1} \geq S_n$. Ceci étant valable pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire, la suite (S_n) est donc croissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

où : $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!],\ \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, donc :

$$\begin{array}{rcl} S_{2n} - S_n & \geq & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \\ & \geq & n \times \frac{1}{2n} \\ & \geq & \frac{1}{2}, \end{array}$$

d'où : $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$.

(c) Comme la suite (S_n) est croissante, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ, alors la suite (S_{2n}), extraite de (S_n), converge également vers ℓ. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a alors :

$$\ell \geq \ell + \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad 0 \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. Donc (S_n) tend vers $+\infty$.

2. (a) Considérons la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \ln(1+x)$.
La fonction f est usuellement deux fois dérivable sur $]-1, 1[$, avec : $\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \frac{1}{1+x}$, puis $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \leq 0$. La fonction f est donc concave sur $]-1, 1[$. De plus, sa tangente en 0 a pour équation cartésienne $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = x$. Comme f est concave, son graphe est en-dessous de cette tangente, donc : $\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) \leq x$. Donc : $\forall x \in]-1, 1[,\ \ln(1+x) \leq x$.
Soit $x \in]-1, 1[$. Alors $-x \in]-1, 1[$, donc on peut appliquer l'inégalité ci-dessus à $-x$, d'où : $\ln(1-x) \leq -x$, c'est-à-dire : $x \leq -\ln(1-x) \leq \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
On a donc finalement : $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) \leq x \leq \ln(\frac{1}{1-x})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, alors : $\frac{1}{k} \in]-1, 1[$, donc, d'après le résultat précédent :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

On a donc, en sommant pour k de 2 à n et en ajoutant 1 :

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leq S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1).$$

Les sommes ci-dessus étant télescopiques, on obtient :

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq S_n \leq 1 + \ln(n) - \ln(1).$$

Comme $\ln(1) = 0$ et que $\ln(2) < 1$, on obtient bien :

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1.$$

(c) Soit $n \geq 2$. L'inégalité précédente s'écrit :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)},$$

où $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1 + \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc, d'après le théorème de convergence par encadrement : $\frac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par définition, on a donc : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = (S_{n+1} - S_n) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$$

d'après 2.(a), donc la suite (γ_n) est croissante. De plus, d'après 2.(b) :

$$\gamma_n = S_n - \ln(n+1) \leq 1 + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 1,$$

donc la suite (γ_n) est majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (γ_n) est donc convergente.

(b) D'après le résultat précédent : $S_n - \ln(n+1) = \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Or : $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, donc :

$$S_n = \ln(n+1) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1) = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $A_{2(n+1)} - A_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0,$
- $A_{2(n+1)+1} - A_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \leq 0,$
- $A_{2n+1} - A_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

donc les suites $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. D'après le résultat précédent, il existe $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N_1,\ |A_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ et : $\forall n \geq N_2,\ |A_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$. Notons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, on a donc : $\forall n \geq N,\ |A_n - \ell| \leq \varepsilon$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers ℓ.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} S_{2n} - A_{2n} & = & \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ & = & \sum_{k=1}^{2n} \frac{1-(-1)^{k-1}}{k}, \end{array}$$

où $1 - (-1)^{k-1} = 0$ si k est impair, 2 si k est pair, donc :

$$\begin{array}{rcl} S_{2n} - A_{2n} & = & \sum_{k=1,\ k \text{ pair}}^{2n} \frac{2}{k} \\ & = & \sum_{k'=1}^{n} \frac{2}{2k'} \\ & = & \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{k'} \\ & = & S_n. \end{array}$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} - A_{2n} = S_n$.

(d) D'après le résultat précédent et d'après 3.(b) :

$$\begin{array}{rcl} A_{2n} & = & \ln(2n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1) - \ln(n) - \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ & = & \ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}(1), \end{array}$$

donc : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} A_{2n} = \ln(2)$.

5. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 & = & \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ & = & \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3b_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\ & = & \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3b_n + \frac{3n^2+5n}{2}. \end{array}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par somme télescopique : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 - 1$, donc :

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n^2+5n}{2}\right) \\ & = & \frac{(2n^3+6n^2+6n-(3n^2+5n)}{6} \\ & = & \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \\ & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{array}$$

Par conséquent : $\frac{1}{b_n} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{b_n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll}
& \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{b_n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} \\
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a(n+1)(2n+1)+bn(2n+1)+cn(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} \\
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, 6 = a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1) \\
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, (2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + (a-6) = 0 \\
\Leftrightarrow & \text{le polynôme } (2a+2b+c)X^2 + (3a+b+c)X + (a-6) \text{ est nul car il a une infinité de racines} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2a+2b+c = 0 \\ 3a+b+c = 0 \\ a-6 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2b+c = -12 \\ b+c = -18 \\ a = 6 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} b = 6 \\ b+c = -18 \\ a = 6 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} b = 6 \\ c = -24 \\ a = 6 \end{cases}
\end{array}$$

On a obtenu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{b_n} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$.

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} & = & \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
& = & S_{2n+1} - \frac{1}{2} S_n - 1.
\end{array}$$

iv. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les résultats précédents :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{B}_n & = & \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} \right) \\
& = & 6S_n + 6(S_{n+1} - 1) - 24(S_{2n+1} - \frac{1}{2} S_n - 1) \\
& = & 18S_n + 6S_{n+1} - 24S_{2n+1} + 18.
\end{array}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'égalité précédente :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{B}_n & = & 18S_n + 6S_{n+1} - 18\left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - 6\left(S_{2n+2} - \frac{1}{2n+2}\right) + 18 \\
& = & 18 - 18A_{2n} - 6A_{2n+2} - \frac{18}{2n+1} + \frac{6}{2n+2},
\end{array}$$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{B}_n = 18 - 24\ln(2)$.

1. (a) Pour tout $x \in E$, $0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$ donc $\text{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$ et $\text{Im}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \{0_E\}$.
Or, $\{0_E\} \cap E = \{0_E\}$ car $\{0_E\} \subset E$
et $\{0_E\} + E = \{x + y \text{ avec } x \in \{0_E\}, y \in E\} = \{0_E + y \text{ avec } y \in E\} = \{y \text{ avec } y \in E\} = E$.
Donc les sous-espaces vectoriels triviaux $\{0_E\}$ et E sont supplémentaires dans E.
De plus, 1 est le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$.
Par conséquent, les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)})$ et $\text{Im}(0_{\mathcal{L}(E)})$ sont supplémentaires dans E. Cela permet de conclure que pour $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $p_0 = 1$.

(b) Pour tout $x \in E$, $\text{id}_E(x) = x$ donc $\text{Ker}(\text{id}_E) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(\text{id}_E) = E$.
On peut conclure que pour $f = \text{id}_E$, $p_0 = 1$.

(c) Par hypothèse, l'endomorphisme f est bijectif. Par conséquent, il est injectif donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et il est surjectif donc $\text{Im}(f) = E$.
On peut conclure que pour f un automorphisme de E, $p_0 = 1$.

(d) L'endomorphisme f étant un projecteur, d'après le cours sur les projecteurs, les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
On peut conclure que pour f un projecteur de E, $p_0 = 1$.

(e) Par hypothèse, f est une symétrie donc $f \circ f = \text{id}_E$. Par conséquent, f est un automorphisme (d'automorphisme réciproque f) et donc $p_0 = 1$.

2. (a) On remarque que $e_3 = f(e_1)$ donc $e_3 \in \text{Im}(f)$ et $f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $e_3 \in \text{Ker}(f)$. Par conséquent, $e_3 \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Or $e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Cela démontre que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ ne sont pas en somme directe.

(b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. La base $\mathcal{E}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a $(x, y, z, t) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3 + t \cdot e_4$.
En utilisant la linéarité de f et les valeurs données dans l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned} f((x,y,z,t)) &= x \cdot f(e_1) + y \cdot f(e_2) + z \cdot f(e_3) + t \cdot f(e_4) \\ &= x \cdot e_3 + y \cdot (-e_1) + e_4 + z \cdot 0_{\mathbb{R}^4} + t \cdot (-e_3) \\ &= -y \cdot e_1 + (x - t) \cdot e_3 + y \cdot e_4 \\ &= (-y, 0, x - t, y) \end{aligned}$$

On a obtenu que $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $f((x, y, z, t)) = (-y, 0, x - t, y)$.

(c) L'image de f est

$$\begin{aligned} & \text{Im}(f) \\ = \ & \{f(X) \text{ avec } X \in \mathbb{R}^4\} \\ = \ & \{f((x,y,z,t)) \text{ avec } (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\} \\ = \ & \{(-y, 0, x-t, y) \text{ avec } (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\} && \text{d'après la question précédente} \\ = \ & \{x \cdot (0,0,1,0) + y \cdot (-1,0,0,1) + t \cdot (0,0,-1,0) \text{ avec } (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\} \\ = \ & \text{Vect}((0,0,1,0), (-1,0,0,1), (0,0,-1,0)) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{D}_1 = ((0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 0, -1, 0))$ est donc une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
On remarque que $(0, 0, -1, 0) = (-1) \cdot (0, 0, 1, 0) + 0 \cdot (-1, 0, 0, 1)$ donc la famille $\mathcal{D}_1$ n'est pas libre mais $\text{Vect}((0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)) = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 0, -1, 0)) = \text{Im}(f)$ donc la sous-famille $\mathcal{D} = ((0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ reste une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
On va vérifier qu'elle est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot (0,0,1,0) + \mu \cdot (-1,0,0,1) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \Rightarrow \ & (-\mu, 0, \lambda, \mu) = (0,0,0,0) \\ \Rightarrow \ & \lambda = 0 \text{ et } \mu = 0 \end{aligned}$$

Cela démontre que la famille $\mathcal{D} = ((0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ est libre.
On peut conclure que la famille $\mathcal{D}$ est une base de $\text{Im}(f)$.
Par conséquent, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Et d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$.

Le noyau de f est

$$\begin{array}{cl} & \mathrm{Ker}(f) \\ = & \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tel que } f((x,y,z,t)) = 0_{\mathbb{R}^4}\} \\ = & \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tel que } (-y,0,x-t,y) = (0,0,0,0)\} \\ = & \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tel que } (-y=0 \text{ et } 0=0 \text{ et } x-t=0 \text{ et } y=0)\} \\ = & \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tel que } y=0 \text{ et } x=t\} \\ = & \{(t,t,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ avec } z,t\in\mathbb{R}\} \\ = & \{z\cdot(0,0,1,0)+t\cdot(1,1,0,1) \text{ avec } z,t\in\mathbb{R}\} \\ = & \mathrm{Vect}((0,0,1,0),(1,1,0,1)) \end{array}$$

La famille $\mathcal{C} = ((0,0,1,0),(1,1,0,1))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$.
De plus, elle a 2 éléments et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. La famille $\mathcal{C} = ((0,0,1,0),(1,1,0,1))$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(d) D'après l'énoncé, f est linéaire et $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = -e_1+e_4$, $f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$ et $f(e_4) = -e_3$. Par conséquent,
$f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$,
$f^2(e_2) = f(f(e_2)) = f(-e_1+e_4) = -f(e_1)+f(e_4) = -e_3-e_3 = -2\cdot e_3$
$f^2(e_3) = f(f(e_3)) = f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4}$,
$f^2(e_4) = f(f(e_4)) = f(-e_3) = -f(e_3) = -0_{\mathbb{R}^4} = 0_{\mathbb{R}^4}$.
Puis, $f^3(e_1) = f(f^2(e_1)) = f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4}$,
$f^3(e_2) = f(f^2(e_2)) = f(-2\cdot e_3) = -2\cdot f(e_3) = -2\cdot 0_{\mathbb{R}^4} = 0_{\mathbb{R}^4}$,
$f^3(e_3) = f(f^2(e_3)) = f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4}$,
$f^3(e_4) = f(f^2(e_4)) = f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4}$.

(e)

- On a déjà démontré que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ne sont pas en somme directe donc ils ne sont pas supplémentaires. Donc $p_0 \neq 1$.
- On utilise les calculs de la question précédente.
  D'une part $f^2(e_2) = -2\cdot e_3$ donc $-2\cdot e_3 \in \mathrm{Im}(f^2)$.
  D'autre part, $f^2(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $e_3 \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Comme $\mathrm{Ker}(f^2)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$, il est stable par multiplication par les scalaires donc $-2\cdot e_3 \in \mathrm{Ker}(f^2)$.
  Par conséquent, $-2\cdot e_3 \in \mathrm{Ker}(f^2)\cap\mathrm{Im}(f^2)$. De plus, $-2\cdot e_3 = (0,0,-2,0) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$. On obtient que $\mathrm{Ker}(f^2)\cap\mathrm{Im}(f^2) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ ne sont pas en somme directe. A fortiori, $\mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ ne sont pas supplémentaires. Donc $p_0 \neq 2$.
- Par contre, $\forall k \in [\![1,4]\!]$, $f^3(e_k) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Comme f est linéaire et que $\mathcal{E} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$. D'après la question 1.(a), $\mathrm{Im}(f^3)$ et $\mathrm{Ker}(f^3)$ sont supplémentaires.
  D'après les trois points précédents, on peut conclure que pour cet exemple, $p_0 = 3$.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$. Par définition, $f^k(x) = 0_E$. Comme f est linéaire, $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. cela démontre l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
On a démontré que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ c'est-à-dire que

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f^3) \subset \mathrm{Ker}(f^4) \subset \dots$$

(b)

- D'après l'énoncé, l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ est de dimension finie et est non nul. On note donc $n \in \mathbb{N}^*$ sa dimension. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^k)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ donc $\mathrm{Ker}(f^k)$ est de dimension finie et $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) \leq n$. Et d'après la chaîne d'inclusions obtenues à la question précédente, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f^{k+1}))$ c'est-à-dire que

$$0 \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f^3)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f^4)) \leq \dots \leq n$$

- On va démontrer par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1})$.
  Pour cela, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^k) \neq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Comme par ailleurs $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) < \dim(\mathrm{Ker}(f^{k+1}))$.
  On en déduit par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) \geq k-1$.
  On écrit la démonstration :

$\star$ On a $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 0 = 1 - 1$.
$\star$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\dim(\text{Ker}(f^k)) \geq k - 1$. Alors d'après ce qui précède, $\dim(\text{Ker}(f^{k+1})) > \dim(\text{Ker}(f^k)) \geq k - 1$. Et comme $\dim(\text{Ker}(f^{k+1})) \in \mathbb{N}$, $\dim(\text{Ker}(f^{k+1})) > k$.
Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\text{Ker}(f^k)) \geq k - 1$.
Par conséquent, $\dim(\text{Ker}(f^{n+2})) \geq n + 1 > n$. C'est en contradiction avec $\dim(\text{Ker}(f^{n+2})) \leq n$.
On a obtenu par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^{m+1})$. D'après l'énoncé, on note m_0 le plus petit tel entier.

(c) Soit $k \geq m_0$. D'après la question 3.(a), on a déjà l'inclusion $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$.
Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$. Par définition $f^{k+1}(x) = 0_E$. On sait que $m_0 \leq k$ donc $0_E = f^{k+1}(x) = f^{m_0+1}(f^{k-m_0}(x))$ donc $f^{k-m_0}(x) \in \text{Ker}(f^{m_0+1})$. Or, par définition de m_0, $\text{Ker}(f^{m_0+1}) = \text{Ker}(f^{m_0})$. Donc $f^{k-m_0}(x) \in \text{Ker}(f^{m_0})$ c'est-à-dire $f^{m_0}(f^{k-m_0}(x)) = 0_E$. Cela se réécrit $f^k(x) = 0_E$ et donc $x \in \text{Ker}(f^k)$. Cela démontre l'inclusion réciproque $\text{Ker}(f^{k+1}) \subset \text{Ker}(f^k)$.
On vient de démontrer que pour tout $k \geq m_0$, $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$.

(d) En tant que sous-espaces vectoriels de E, on a $0_E \in \text{Im}(f^{m_0})$ et $0_E \in \text{Ker}(f^{m_0})$ donc $\{0_E\} \subset \text{Im}(f^{m_0}) \cap \text{Ker}(f^{m_0})$.
Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(f^{m_0}) \cap \text{Ker}(f^{m_0})$. On a $x \in \text{Im}(f^{m_0})$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f^{m_0}(z)$. Puis $x = f^{m_0}(z) \in \text{Ker}(f^{m_0})$ donc $f^{m_0}(f^{m_0}(z)) = 0_E$. Par conséquent, $z \in \text{Ker}(f^{m_0+m_0})$. Or $m_0 \in \mathbb{N}^*$ donc d'après l'énoncé, $\text{Ker}(f^{m_0+m_0}) = \text{Ker}(f^{m_0})$. On en déduit que $z \in \text{Ker}(f^{m_0})$ puis que $x = f^{m_0}(z) = 0_E \in \{0_E\}$. Cela démontre l'inclusion réciproque $\text{Im}(f^{m_0}) \cap \text{Ker}(f^{m_0}) \subset \{0_E\}$.
On a démontré que $\text{Im}(f^{m_0}) \cap \text{Ker}(f^{m_0}) = \{0_E\}$ c'est-à-dire que $\text{Im}(f^{m_0})$ et $\text{Ker}(f^{m_0})$ sont en somme directe.

(e)

- D'après la question précédente, $\text{Im}(f^{m_0}) \cap \text{Ker}(f^{m_0}) = \{0_E\}$. De plus, on en déduit que $\dim(\text{Im}(f^{m_0}) + \text{Ker}(f^{m_0})) = \dim(\text{Im}(f^{m_0})) + \dim(\text{Ker}(f^{m_0}))$.
- En tant que sous-espaces vectoriels de E, on a $\text{Im}(f^{m_0}) + \text{Ker}(f^{m_0}) \subset E$.
D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f^{m_0} de E, on a $\dim(\text{Im}(f^{m_0})) + \dim(\text{Im}(f^{m_0})) = \dim(E)$. Par conséquent, $\dim(\text{Im}(f^{m_0}) + \text{Ker}(f^{m_0})) = \dim(E)$.
Comme l'espace vectoriel E est de dimension finie, on obtient que $\text{Im}(f^{m_0}) + \text{Ker}(f^{m_0}) = E$.
D'après les deux points précédents, les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(f^{m_0})$ et $\text{Ker}(f^{m_0})$ sont supplémentaires dans E.

(f)

- Si $m_0 = 1$ alors m_0 est le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Ker}(f^p)$ sont supplémentaires dans E.

- Si $m_0 \geq 2$, on fait un raisonnement par l'absurde.
Pour cela, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < m_0$ et $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Ker}(f^p)$ sont supplémentaires dans E.
On sait déjà que $\text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^{p+1})$.
Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f^{p+1})$. Par définition, $f^{p+1}(x) = 0_E$. D'une part, $f(f^p(x)) = 0_E$ donc $f^p(x) \in \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^p)$ d'après 3.(a). D'autre part, $f^p(x) \in \text{Im}(f^p)$. Par conséquent, $f^p(x) \in \text{Im}(f^p) \cap \text{Ker}(f^p)$. Or par hypothèse, $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Ker}(f^p)$ sont supplémentaires dans E donc $\text{Im}(f^p) \cap \text{Ker}(f^p) = \{0_E\}$. On en déduit que $f^p(x) = 0_E$ et donc $x \in \text{Ker}(f^p)$. Cela démontre que $\text{Ker}(f^{p+1}) \subset \text{Ker}(f^p)$.
Par double inclusion, on obtient $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$, ce qui, sachant que $p < m_0$, est en contradiction avec la définition de m_0.
On a montré par l'absurde que m_0 est bien le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Ker}(f^p)$ sont supplémentaires dans E. Par disjonction de cas, $p_0 = m_0$.

1. • Si $N=1$, alors $\alpha=\arccos(1)=0$ donc $\frac{\alpha}{\pi}=0\in\mathbb{Q}$,
   • Si $N=2$, alors $\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{1}{4}\in\mathbb{Q}$,
   • Si $N=4$, alors $\alpha=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ donc $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$.

   Donc, si $N\in\{1,2,4\}$, alors $\frac{\alpha}{\pi}\in\mathbb{Q}$.
2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl}\cos((n+2)\alpha)+\cos(n\alpha) & = & \cos((n+1)\alpha+\alpha)+\cos((n+1)\alpha-\alpha)\\ & = & 2\cos((n+1)\alpha)\cos(\alpha)\\ & = & 2\cos((n+1)\alpha)\cos(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right))\\ & = & \frac{2}{\sqrt{N}}\cos((n+1)\alpha),\end{array}$$

   donc :

$$\begin{array}{rcl}a_{n+2} & = & N^{\frac{n+2}{2}}\cos((n+2)\alpha)\\ & = & 2N^{\frac{n+1}{2}}\cos((n+1)\alpha)-N^{\frac{n+2}{2}}\cos(n\alpha)\\ & = & 2a_{n+1}-Na_n.\end{array}$$

   (b) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons P_n l'assertion « $a_n\in\mathbb{Z}$ ».
   Comme $a_0=\cos(0)=1$ et $a_1=\sqrt{N}\cos(\alpha)=1$, P_0 et P_1 sont vraies.
   Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons P_n et P_{n+1} vraies. Alors a_n et a_{n+1} sont dans $\mathbb{Z}$, donc $a_{n+2}=2a_{n+1}-Na_n\in\mathbb{Z}$. Donc P_{n+2} est vraie.
   Donc, par récurrence double, P_n est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

   (c) i. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons Q_n l'assertion « p ne divise pas a_n ».
   Comme $a_0=a_1=1$, Q_0 et Q_1 sont vraies.
   Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons Q_n et Q_{n+1} vraies. Alors p ne divise ni a_n ni a_{n+1}, et comme p est un nombre premier impair, donc p ne divise pas $2a_{n+1}$ et p divise Na_n (car p divise N). Si p divise a_{n+2} alors p divise $2a_{n+1}=a_{n+2}+Na_n$: c'est une contradiction. Donc p ne divise pas $a_{n+2}=2a_{n+1}-Na_n$. Donc Q_{n+2} est vraie.
   Donc, par récurrence double, Q_n est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

   ii. On a : $a_{2\ell}=N^\ell\cos(2\ell\alpha)=N^\ell\cos(2k\pi)=N^\ell$.
   Donc $a_{2\ell}$ est une puissance strictement positive de N, et comme p divise N, donc p divise $a_{2\ell}$, ce qui est exclu d'après la question précédente. Donc, par l'absurde, $\frac{\alpha}{\pi}\notin\mathbb{Q}$.

   (d) i. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après 2.(a), et comme $N=2^m$, on a :

$$\begin{array}{rcl}b_{n+2} & = & \frac{a_{n+2}}{2^{n+1}}\\ & = & \frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{Na_n}{2^{n+1}}\\ & = & b_{n+1}-\frac{N}{4}b_n\\ & = & b_{n+1}-2^{m-2}b_n.\end{array}$$

   ii. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note R_n l'assertion « b_n est impair ».
   Comme $b_1=a_1=1$, R_1 est vraie.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons R_n vraie. Alors b_n est impair et $2^{m-2}b_{n-1}$ est pair (car $m>2$). Donc $b_{n+1}=b_n-2^{m-2}b_{n-1}$ est impair. Donc R_{n+1} est vraie.
   Donc, par récurrence, R_n est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

   iii. On a : $b_{2\ell}=\frac{N^\ell\cos(2\ell\alpha)}{2^{2\ell-1}}=\frac{2^{m\ell}}{2^{2\ell-1}}\cos(2k\pi)=2^{(m-2)\ell+1}$.
   Donc $b_{2\ell}$ est une puissance strictement positive de 2, donc $b_{2\ell}$ est pair, ce qui est exclu d'après la question précédente. Donc, par l'absurde, $\frac{\alpha}{\pi}\notin\mathbb{Q}$.
3. On a montré en 1. l'implication

$$(N\in\{1,2,4\})\ \Rightarrow\ \left(\frac{\alpha}{\pi}\in\mathbb{Q}\right).$$

   On a montré en 2.(c) et (d), par disjonction de cas, l'implication : $(N\notin\{1,2,4\})\ \Rightarrow\ \left(\frac{\alpha}{\pi}\notin\mathbb{Q}\right)$, c'est-à-dire, par contraposée :

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\in\mathbb{Q}\right)\ \Rightarrow\ (N\in\{1,2,4\}).$$

   On a donc l'équivalence :

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\in\mathbb{Q}\right)\ \Leftrightarrow\ (N\in\{1,2,4\}).$$

Cet exercice est inspiré de la vidéo "Questions d'angles" des 5 minutes Lebesgue, disponible ici.