Chapitre A1
Calculs sur les réels

I. Notions de base

A. Ensembles de nombres

Notations

L'ensemble des *entiers naturels* est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$$

L'ensemble des *entiers relatifs* ou plus simplement des *entiers* est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Pour tout réel a on note :

$$a\mathbb{N} = \{an \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad a\mathbb{Z} = \{an \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples.

(i) $2\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.

(ii) $3\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 3.

(iii) On peut définir $\mathbb{Z}$ par : $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$

(iv) L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = 0$ est $\pi\mathbb{Z}$.

Définition

L'ensemble des nombres *rationnels* est :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Proposition

Soit r un rationnel. Alors il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ et p, q sont premiers entre eux.
Cette écriture est appelée *forme irréductible* de r.

Remarque. Le développement d'un nombre rationnel non décimal en base quelconque présente une ration.

Exemple 1. Développement décimal de : $\frac{2}{3}$ $\frac{25}{9}$ $\frac{4}{11}$ $\frac{2}{7}$

Notation

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Définition

Soit i un nombre vérifiant $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + iy$ où x et y sont deux réels :

$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ces nombres sont appelés *nombres complexes*.

Remarque. Les ensembles de nombres vérifient les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Notations

On note $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ les ensembles respectifs $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ privés de 0.
On note $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ les ensembles des réels respectivement positifs, négatifs, strictement positifs, strictement négatifs.

B. La relation d'ordre sur les réels

Définition

L'ensemble des réels est muni d'une *relation d'ordre* notée $\leqslant$.

Proposition

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible à la somme et à la multiplication par un réel positif. En d'autres termes, pour tous réels a, b, c, d :

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & a \leqslant b & \text{et} & c \leqslant d & \text{alors} & a + c \leqslant b + d \\ \text{Si} & a \leqslant b & \text{et} & c \geqslant 0 & \text{alors} & ac \leqslant bc \end{array}$$

En conséquence :

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & a \leqslant b & \text{et} & c \leqslant 0 & \text{alors} & ac \geqslant bc \\ \text{Si} & 0 \leqslant a \leqslant b & \text{et} & 0 \leqslant c \leqslant d & \text{alors} & ac \leqslant bd \\ \text{Si} & 0 < a \leqslant b & & & \text{alors} & 0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} \\ \text{Si} & a \leqslant b < 0 & & & \text{alors} & \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} < 0 \end{array}$$

Méthode

Pour majorer une fraction on peut majorer son numérateur et minorer son dénominateur. De même pour la minoration.

Exemple 2. Démontrer que pour tout $x \in [0,2]$: $\dfrac{1}{7} \leqslant \dfrac{x+1}{x^2+3} \leqslant 1$.

Proposition

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs.

Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ alors

Proposition

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

Si $n > m$ alors $n \geqslant$

C. Valeur absolue

Définition

Deux définitions équivalentes de la *valeur absolue* :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad |x| = \sqrt{x^2}$$

Proposition

Pour tous réels x et y :

- $|x| \geqslant 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = x^2$
- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y \iff x^2 = y^2$

Proposition (Inégalité triangulaire)

Pour tous réels x et y :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Proposition (Inégalités triangulaires complètes)

Pour tous réels x et y :

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

L'égalité dans l'inégalité de droite a lieu si et seulement si x et y sont de même signe. L'égalité dans l'inégalité de gauche a lieu si et seulement si x et y sont de signes opposés.
En remplaçant y par $-y$:

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$$

Proposition

Soit a un réel strictement positif. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} |x| \leqslant a & \iff & -a \leqslant x \leqslant a \\ |x| \geqslant a & \iff & x \geqslant a \quad \text{ou} \quad x \leqslant -a \end{cases}$$

Proposition

Soit a un réel, r un réel strictement positif. Alors pour tout réel x :

$$|x - a| \leqslant r \qquad \iff \qquad x \in [a - r, a + r]$$

▶ **Exercice 1.**

Remarque

- *Résoudre une équation* d'inconnue x signifie donner l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble des réels x vérifiant l'équation.
  De même pour une inéquation.
  De même pour une équation à plusieurs inconnues.
- La méthode la plus simple est en général de procéder par *équivalences*.
  Parfois on procède juste par implication, il faut alors vérifier les solutions obtenues.

Proposition

Soit x un réel. Alors :

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad |x| \leqslant \varepsilon) \qquad \iff \qquad x = 0$$

Démonstration. Le sens indirect est évident, le sens direct se démontre par l'absurde. En effet, si x est non-nul alors on pose $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, on a alors l'existence d'un ε strictement positif tel que $|x| > \varepsilon$. □

D. Partie entière

Définition

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on appelle *partie entière* de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à n.
En d'autres termes, $\lfloor x \rfloor$ est l'entier n tel que $n \leqslant x < n+1$.

Exemple 3. Parties entières de π et de $-\pi$.

Propositions

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $n = \lfloor x \rfloor \iff x \in [n, n+1[$

(ii) Par définition : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

Cet encadrement donne : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

E. Racine carrée

Définition

La *racine carrée* d'un réel positif x, notée $\sqrt{x}$, est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.

Proposition

Pour tous réels positifs x et y : $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Attention

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x}^2 = x$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = |x|$

▷ **Exercice 2.**

F. Puissances

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note : $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Exemples. $x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad x^{-1} = \frac{1}{x}$

Proposition

Pour tous complexes x et y et tous entiers m et n, sous réserve d'existence :

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad (x^m)^n = x^{mn} \qquad (xy)^n = x^n y^n$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ la *racine n-ème de x*, c'est-à-dire l'unique réel positif y tel que $y^n = x$.

Remarques.

(i) La définition ci-dessus est valable pour tout réel positif x. Mais dans le cas où n est un entier positif impair alors la racine n-ème d'un réel négatif x est définie, c'est l'unique réel y tel que $y^n = x$.

(ii) Si x est un réel strictement positif alors on peut définir, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) : $\quad x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

Exemples. Calculer :

$16^{\frac{1}{2}} =$	$27^{\frac{4}{3}} =$	$2^{-\frac{1}{2}} =$	$100^{\frac{5}{2}} =$
$5^{-2} =$	$4^{\frac{7}{2}} =$	$9^{\frac{1}{3}} =$	$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$
$8^{-\frac{2}{3}} =$	$1^{-\frac{5}{6}} =$	$64^{\frac{1}{6}} =$	$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$

II. Autres rappels

A. Second degré

Définition

Une *équation du second degré* réelle d'inconnue x est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b, c sont des réels.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ est on appelle ce réel *discriminant* de l'équation.

Théorème

Avec les notations ci-dessus :

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution : $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution réelle.

Proposition

Dans le cas où $\Delta \geqslant 0$, notons $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple 4. Résoudre l'équation $\quad x^2 + 8x + 15 = 0 \quad$ et vérifier la proposition.

Proposition : Signe du trinôme

On conserve les notations de la propriété et on note $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ est du signe opposé de a si x est entre les racines de l'équation, et du signe de a sinon.
- Si $\Delta \leqslant 0$ alors $f(x)$ est du signe de a quel que soit x.

B. Limites

Définitions

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou une fonction f *admet une limite* si :

- Elle converge vers un réel ℓ.
- Ou elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On note

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

et on appelle cet ensemble *la droite numérique achevée*.
Il s'agit des limites possibles pour une suite ou une fonction admettant une limite.

Notations

(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. La notation

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

signifie : la suite (u_n) admet une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

(ii) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Lanotation

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

signifie : la suite f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Rappel. Les formes indéterminées pour le calcul de limite sont :

$$\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Méthode

Pour calculer une limite indéterminée il faut manipuler l'expression judicieusement.
Par exemple :

- Factoriser
- Développer
- Utiliser une quantité conjuguée
- Identifier le terme le plus important.

On peut aussi appliquer le théorème d'encadrement.

Théorème d'encadrement

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (v_n) converge aussi vers cette limite.

Exemple 5. Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 - 5x^2$

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+4x^2+1}{2x^2-x+3}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+2x-1}$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x-5}{x^2-2x}$

h. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n-4^n}{3^n-2^n}$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

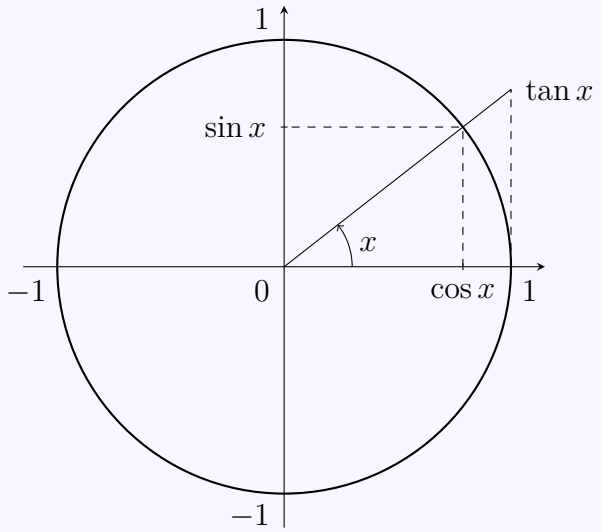
k. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

l. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

C. Trigonométrie

Définition

Le *cosinus* et le *sinus* d'un réel x sont définis grâce au cercle trigonométrique.



La fonction *tangente* est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Proposition

Pour tout réel x :

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

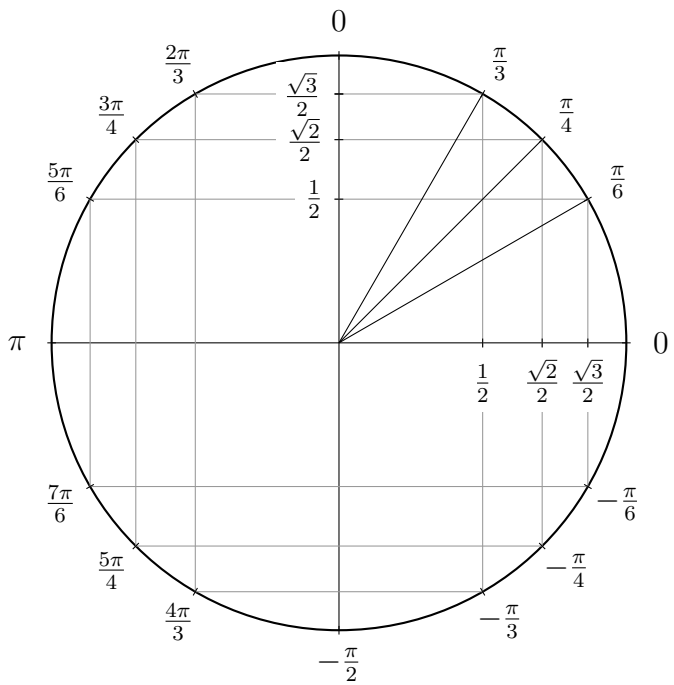
Démonstration. Tout se vérifie sur le cercle trigonométrique.

Proposition - Formules de base

Pour tous réels x et y :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Angles et valeurs remarquables.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Méthode : Résolution d'équations trigonométriques

$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \text{ou } x = -y + 2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin y \iff \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \text{ou } x = \pi - y + 2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan y \iff x = y + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Définition - Congruence

Soit T un réel. On dit que deux réels x et y sont *congrus modulo* T s'il existe un entier k tel que $x = y + kT$.

On note alors $x \equiv y \ [T]$.

Remarque. On peut donc écrire :

$$\cos x = \cos y \iff x \equiv \pm y \ [2\pi]$$

$$\sin x = \sin y \iff \begin{cases} x \equiv y \ [2\pi] \\ \text{ou } \ x \equiv \pi - y \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \ [\pi]$$

Proposition - Formules d'addition et de duplication

Pour tous réels x et y :

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \qquad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Proposition - Formules de linéarisation

Pour tout réel x :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Proposition - Formules pour la tangente

Pour tous réels x et y, sous réserve d'existence :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$