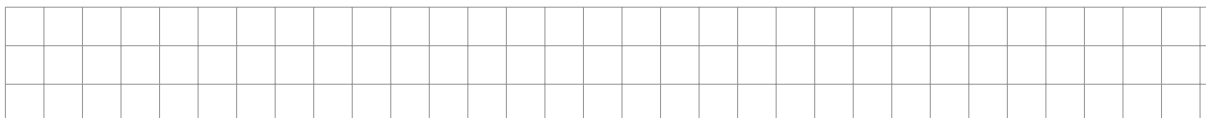


Définition. Soit i un nombre vérifiant $i^2 = -1$. On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres $x + iy$ où x et y sont deux réels :



Ces nombres sont appelés nombres complexes.

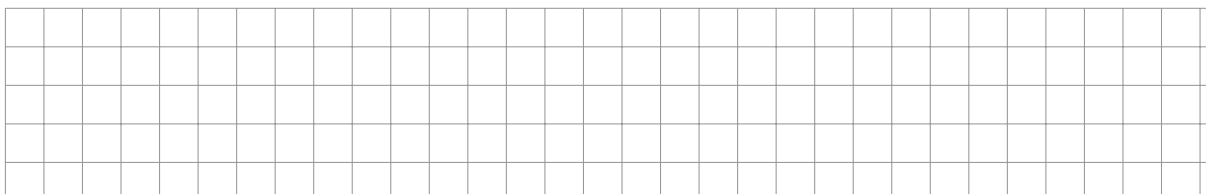
Exemple 2. Les ensembles de nombres vérifient les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

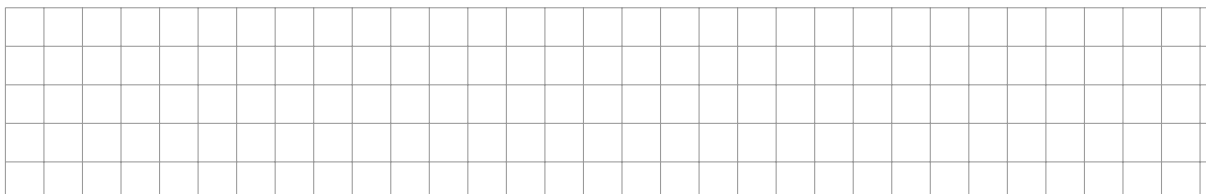
Notations. On note \mathbb{N}^* , \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^* et \mathbb{C}^* les ensembles respectifs \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} privés de 0. On note \mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_- , \mathbb{R}_+^* , \mathbb{R}_-^* les ensembles des réels respectivement positifs, négatifs, strictement positifs, strictement négatifs.

B. Valeur absolue

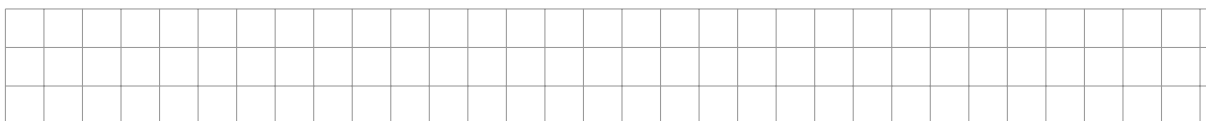
Rappel. Deux définitions équivalentes de la valeur absolue :



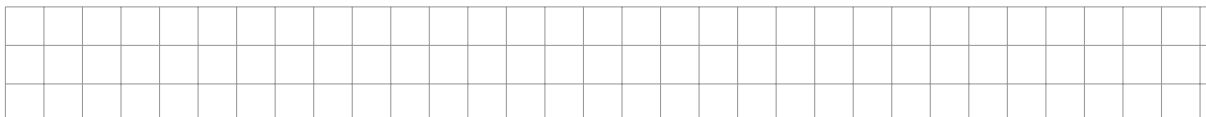
Proposition. Pour tous réels x et y :



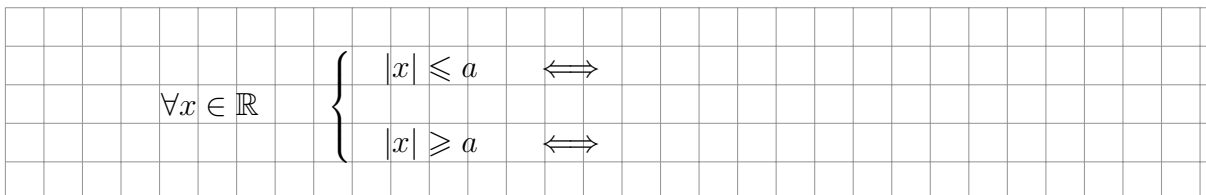
Proposition (Inégalités triangulaires). Pour tous réels x et y :



L'égalité dans l'inégalité de droite a lieu si et seulement si x et y sont de même signe. L'égalité dans l'inégalité de gauche a lieu si et seulement si x et y sont de signes opposés. En remplaçant y par $-y$:



Proposition. Soit a un réel strictement positif. Alors :



Proposition. Pour tous réels a et b , b étant positif :

$ x - a \leq b \iff$

▷ **Exercice 1.**

Proposition. Soit x un réel. Alors :

Démonstration. Le sens indirect est évident, le sens direct se démontre par l'absurde. En effet, si x est non-nul alors on pose $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, on a alors l'existence d'un ε strictement positif tel que $|x| > \varepsilon$. □

C. Racine carrée

Définition. La racine carrée d'un réel positif x est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$. On note $y = \sqrt{x}$.

Proposition. Pour tous réel positifs x et y :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Remarque. Attention :

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2} =$	et	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} =$
---	----	---

▷ **Exercice 2.**

D. Puissances

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note : $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_n$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Exemple.

$x^0 =$	$x^1 =$	$x^{-1} =$
---------	---------	------------

Proposition. Pour tous complexes x et y et tous entiers m et n , sous réserve d'existence :

$x^m x^n =$	$(x^m)^n =$	$(xy)^n =$
-------------	-------------	------------

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ la racine n -ème de x , c'est-à-dire l'unique réel positif y tel que $y^n = x$.

Remarques.

(i) La définition ci-dessus est valable pour tout réel positif x . Mais dans le cas où n est un entier positif impair alors la racine n -ème d'un réel négatif x est définie, c'est l'unique réel y tel que $y^n = x$.

(ii) Si x est un réel strictement positif alors on peut définir, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) : $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$

Exemples. Calculer :

$16^{\frac{1}{2}} =$	$27^{\frac{4}{3}} =$	$2^{-\frac{1}{2}} =$	$100^{\frac{5}{2}} =$
$5^{-2} =$	$4^{\frac{7}{2}} =$	$9^{\frac{1}{3}} =$	$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$
$8^{-\frac{2}{3}} =$	$1^{-\frac{5}{6}} =$	$64^{\frac{1}{6}} =$	$\sqrt{7^{-\frac{2}{3}}} =$

II. Sommes et produits

A. Définitions

Soit n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$.

Notation. Étant donnés des nombres a_1, a_2, \dots, a_n on note :

En posant $I = \{1, 2, \dots, n\}$, on note également :

Exemple.

$\sum_{i=1}^5 a_i + \sum_{i=6}^{11} a_i =$
--

Remarque. On dit que i est une variable muette :

Ce n'est pas le cas de n !

On notera parfois $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ car cette quantité dépend de n mais pas de k .

Exemple. En gardant la notation pour S_n , compléter :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = S_{n-1} +$														
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

B. Exemples

Exemple 3. Calculer : $\sum_{k=0}^3 \frac{k^2}{k+1}$

Exemple 4. Calculer : $\sum_{k=1}^1 k \quad \sum_{k=1}^2 k \quad \sum_{k=1}^3 k \quad \sum_{k=1}^4 k$

La formule générale est due selon l'anecdote à C. F. Gauss (1777 – 1855).

Proposition (somme des premiers entiers).

<i>Pour tout $n \in \mathbb{N}$:</i>														
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Démonstration. En alternant, ou géométriquement, ou encore par récurrence. □

Proposition (somme des premiers carrés, des premiers cubes).

<i>Pour tout $n \in \mathbb{N}$:</i>														
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

▷ **Exercices 3, 4.**

Remarque (somme vide, produit vide).

Par convention si $m > n$ alors : $\sum_{k=m}^n a_k = 0$ et $\prod_{k=m}^n a_k = 1$

Par exemple : $\sum_{k=1}^0 a_k =$ $\prod_{k=1}^0 a_k =$														
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Ceci est cohérent avec la formule $\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k$ dans le cas où $m = 0$.

Remarque (Autres notations).

$\sum_{\substack{0 \leq k \leq 9 \\ k \text{ pair}}} a_k =$ $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n a_i =$														
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

C. Propriétés

Notation. On note $(a_k)_{1 \leq k \leq n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Proposition (linéarité). Pour toutes familles de nombres $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$$

Démonstration. Il suffit des développer les sommes. □

Proposition. Avec les mêmes notations :

$\prod_{k=1}^n (a_k b_k) =$	et	$\prod_{k=1}^n \lambda a_k =$
-----------------------------	----	-------------------------------

Remarque.

$\sum_{k=1}^n 1 =$	$\sum_{k=1}^n 6 =$	$\prod_{k=1}^n 4 =$
--------------------	--------------------	---------------------

Exemple 5. Calculer : $\sum_{k=1}^{10} (6k - 5)$

Exemple 6 (Changement d'indice). Calculer $\sum_{k=9}^{29} k$ de deux manières différentes :

- a. En complétant : $\sum_{k=9}^{29} k = \sum_{k=1}^{29} k - \sum_{k=1}^* k = \dots$
- b. Grâce au changement d'indice $\ell = k - 8$.

▷ **Exercice 5.**

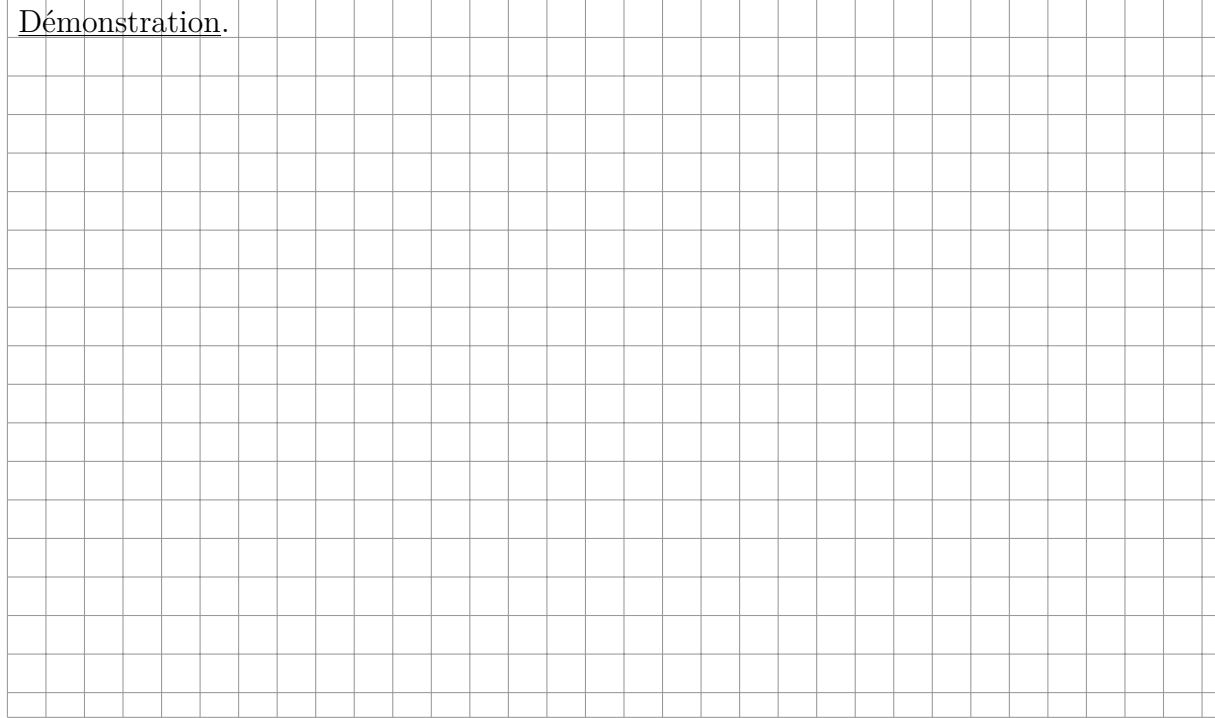
Exemple 7. Calculer de deux façons différentes $\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n (k - 1)^2$: par changement d'indice, puis en simplifiant $k^2 - (k - 1)^2$.

Remarque (Sommes télescopiques).

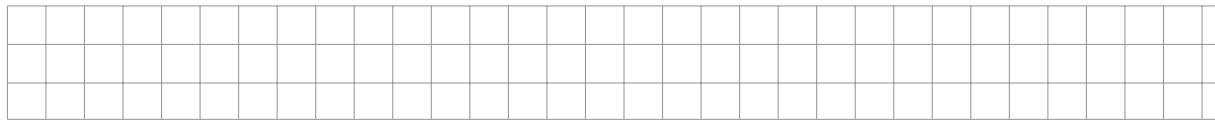
$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) =$	$\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} =$
----------------------------------	---------------------------------------

▷ **Exercices 6, 7.**

Démonstration.

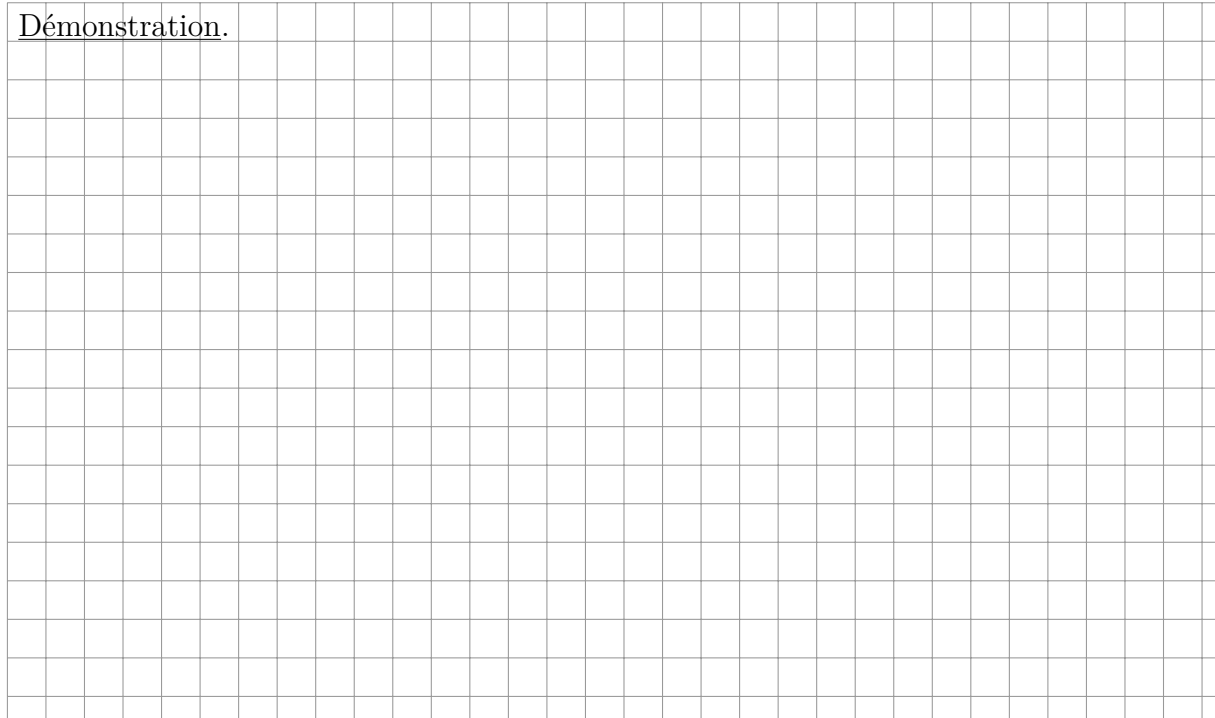


Corollaire. *Pour tous complexes a et b , et tout $n \in \mathbb{N}$:*



Exemple 8. Vérification pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, puis $n = 1$ et $n = 0$.

Démonstration.



▷ **Exercice 8.**

E. Sommes doubles

Exemple 9 (sommages rectangulaires). Calculer : $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i+j)$ et $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ij$

Exemple 10 (sommages triangulaires). Calculer : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j$ et $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n j$

On remarque que ces deux sommes sont égales.

Notation. On considère une famille (a_{ij}) de réels indexée par deux familles. On note :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

▷ **Exercice 9.**

III. Coefficients binomiaux**A. Factorielle**

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $n! = \prod_{k=1}^n k$ et on appelle factorielle de n cet entier.

Exemple. Les premières factorielles :

Exemple 11. Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = \quad \frac{11!}{12!} = \quad \frac{100!}{98!} = \quad \frac{10!}{(5!)^2} =$$

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)! = (n+1)n!$

▷ **Exercice 10.**

B. Coefficients du binôme

Définition. Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On note :

Si k est inférieur à 0 ou supérieur à n alors on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Ces nombres (nous verrons qu'ils sont entiers) sont appelés coefficients binomiaux, et $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ».

Exemples. Valeurs remarquables :

$$\binom{n}{0} = \quad \binom{n}{n} = \quad \binom{n}{1} = \quad \binom{n}{2} =$$

Proposition (Symétrie). *Pour tous entiers n et k :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration.

Proposition (Formule de Pascal). (Blaise PASCAL, France, 1623 –1662)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^$ et k :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration. Si $k < 0$ ou $k > n$ la formule est immédiate : $0 + 0 = 0$.

Si $k = 0$ alors la formule donne $0 + 1 = 1$. Si $k = n$ alors elle donne $1 + 0 = 1$.

Supposons maintenant que $1 \leq k \leq n - 1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Une autre démonstration viendra dans le chapitre sur les ensembles. □

Définition. Le triangle de Pascal permet de calculer les premiers coefficients binomiaux.



Proposition. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Démonstration.



IV. Systèmes linéaires

A. Définitions

Dans cette partie n et p désignent deux entiers naturels non-nuls.

Définition. Un système linéaire de n équations à p inconnues est un ensemble S de n équations linéaires à p inconnues x_1, \dots, x_p :



- Les réels a_{ij} pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ sont les coefficients du système.
- Les réels b_i pour $1 \leq i \leq n$ forment le second membre du système.
- On note L_1, \dots, L_n les lignes du système.

Exemple 14.

$$(i) S_1 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

On constate qu'il s'agit de déterminer l'intersection de deux droites du plans.

$$(ii) S_4 : \begin{cases} 4x + 2y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Ici il s'agit de l'intersection de trois plan de l'espace. L'ensemble des solutions peut être réduit à un point, ou être vide, ou être infini.

$$(iii) \text{ Cas extrêmes. } \quad S_5 : 2x = -5 \quad S_6 : 3x + 2y = 11 \quad S_7 : \begin{cases} 2x = 2 \\ 5x = 7 \end{cases}$$

On constate que le nombre de solutions peut être nul ou infini.

Définition. Une solution de S est un p -uplet de nombres $x = (x_1, \dots, x_p)$ satisfaisant toutes les lignes du système. La résolution d'un système consiste à déterminer toutes ses solutions.

Théorème. *Un système linéaire admet ou bien une infinité de solution, ou bien une unique solution, ou sinon aucune solution.*

B. Algorithme du pivot de Gauss

Définitions. Les opérations élémentaires sur un système linéaire sont :

- $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par α ($i \neq j, \alpha \in \mathbb{R}$)
- $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ multiplication de la ligne i par λ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$)
- $(L_i \leftrightarrow L_j)$ interversion des lignes i et j .

Proposition. Toute opération élémentaire est inversible :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$	<i>admet pour opération inverse</i>
$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$	<i>admet pour opération inverse</i>
$(L_i \leftrightarrow L_j)$	<i>admet pour opération inverse</i>

Ainsi on ne change pas les solutions d'un système linéaire en lui appliquant des opérations élémentaires.

Exemple 15. Résolution des systèmes :

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad S_9 : \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 7y = 7 \\ 2x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$$

Méthode. On utilise uniquement des opérations élémentaires.

On essaie d'*échelonner* puis de *réduire* le système.

1. $\begin{cases} \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases}$	2. $\begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases}$	3. $\begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ + y + \bullet z = \bullet \\ + + \bullet z = \bullet \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ + y + \bullet z = \bullet \\ + + z = \bullet \end{cases}$	5. $\begin{cases} x + \bullet y = \bullet \\ + y = \bullet \\ + + z = \bullet \end{cases}$	6. $\begin{cases} x = \bullet \\ y = \bullet \\ z = \bullet \end{cases}$

Dans certains cas ceci est impossible, car il n'existe par obligatoirement une et une seule solution.

Exemple 16. Résolution du système :

$$S_{10} : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

▷ **Exercices 13, 14, 15.**