Chapitre A2
Calculs algébriques

I. Sommes et produits

A. Définitions

Soit n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$.

Notation

Étant donnés des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on note :

En posant $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, on note également :

Exemple.

$$\sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{i=6}^{11} a_i =$$

Remarque. On dit que i est une *variable muette* :

Ce n'est pas le cas de n !

On notera parfois $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ car cette quantité dépend de n mais pas de k.

Exemple. En gardant la notation pour S_n, compléter :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = S_{n-1} +$$

B. Exemples

Exemple 1. Calculer : $\sum_{k=0}^{3} \frac{k^2}{k+1}$

Exemple 2. Calculer : $\sum_{k=1}^{1} k \qquad \sum_{k=1}^{2} k \qquad \sum_{k=1}^{3} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k$

La formule générale est due selon l'anecdote à C. F. Gauss (1777 – 1855).

Proposition (somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Démonstration. En alternant, ou géométriquement, ou encore par récurrence. □

Proposition (somme des premiers carrés, des premiers cubes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

▷ **Exercices 1, 2.**

Remarque (somme vide, produit vide).

Par convention si $m > n$ alors : $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ et $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$

Par exemple : $\sum_{k=1}^{0} a_k =$ $\prod_{k=1}^{0} a_k =$

Ceci est cohérent avec la formule $\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ dans le cas où $m = 0$.

Remarque (Autres notations).

$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 9 \\ k \text{ pair}}} a_k =$ $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} a_i =$

C. Propriétés

Notation

On note $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Proposition (linéarité)

Pour toutes familles de nombres $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Démonstration. Il suffit des développer les sommes. □

Proposition

Avec les mêmes notations :

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \qquad\qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda a_k =$$

Remarque.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} 6 = \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} 4 =$$

Exemple 3. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(6k-5)$

Exemple 4 (Changement d'indice). Calculer $\displaystyle\sum_{k=9}^{29} k$ de deux manières différentes :

a. En complétant : $\displaystyle\sum_{k=9}^{29} k = \sum_{k=1}^{29} k - \sum_{k=*}^{*} k = \cdots$

b. Grâce au changement d'indice $\ell = k-8$.

▷ **Exercice 3.**

Exemple 5. Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$: par changement d'indice, puis en simplifiant $k^2-(k-1)^2$.

Remarque (Sommes télescopiques).

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}} =$$

▷ **Exercices 4, 5.**

D. Sommes de suites

Rappel. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* s'il existe un complexe r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Ce complexe r est appelé *raison* de la suite (u_n).

Par propriété, si la suite (u_n) est arithmétique de raison r alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Proposition (somme des termes d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

Plus généralement :

Démonstration. À savoir faire en exercice. □

Rappel. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* s'il existe un complexe q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

Ce complexe q est appelé *raison* de la suite (u_n).

Par propriété, si la suite (u_n) est géométrique de raison q alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n$$

Proposition (somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

Plus généralement :

Démonstration.

Corollaire

Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:

Exemple 6. Vérification pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, puis $n = 1$ et $n = 0$.

Démonstration.

▷ **Exercice 6.**

Définition

Une suite (u_n) est *arithmético-géométrique* s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b}$$

Remarque. On suppose dans la suite que $a \neq 1$ (sinon la suite est arithmétique).

Méthode

- Introduire le réel γ tel que $\gamma = a\gamma + b$.
- Vérifier que la suite $(v_n) = (u_n - \gamma)$ est géométrique.
- En déduire le terme général de (v_n), puis celui de (u_n).

Exemple 7. Déterminer le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4$$

▷ **Exercice 7.**

E. Sommes doubles

Exemple 8 (sommes rectangulaires). Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij$

Exemple 9 (sommes triangulaires). Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} j$

On remarque que ces deux sommes sont égales.

Notation

On considère une famille (a_{ij}) de réels indexée par deux familles. On note :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

▷ **Exercice 8.**

II. Coefficients binomiaux

A. Factorielle

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ et on appelle *factorielle* de n cet entier.

Exemple. Les premières factorielles :

Exemple 10. Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = \qquad \frac{11!}{12!} = \qquad \frac{100!}{98!} = \qquad \frac{10!}{(5!)^2} =$$

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (n+1)! = (n+1)\, n!$

▷ **Exercice 9.**

B. Coefficients du binôme

Définition

Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. On note :

Si k est inférieur à 0 ou supérieur à n alors on pose $\binom{n}{k} = 0$.
Ces nombres (nous verrons qu'ils sont entiers) sont appelés *coefficients binomiaux*, et $\binom{n}{k}$ se lit «k parmi n».

Exemples. Valeurs remarquables :

$$\binom{n}{0} = \qquad \binom{n}{n} = \qquad \binom{n}{1} = \qquad \binom{n}{2} =$$

Proposition (Symétrie)

Pour tous entiers n et k :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration.

Définition

Le *triangle de Pascal* permet de calculer les premiers coefficients binomiaux.

Proposition (Formule de Pascal)

(Blaise Pascal, France, 1623 –1662)
Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

Démonstration. Si $k < 0$ ou $k > n$ la formule est immédiate : $0 + 0 = 0$.

Si $k = 0$ alors la formule donne $0 + 1 = 1$. Si $k = n$ alors elle donne $1 + 0 = 1$.

Supposons maintenant que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Proposition

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Démonstration.

Proposition (formule du binôme de Newton)

Soit n un entier naturel, a et b deux complexes. Alors :

Exemple 11. Pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Remarque. Pour $(a - b)^n$ on alterne les signes.

Démonstration.

Exemple 12. Calculer $10{,}2^5$.

▷ **Exercice 10.**

Proposition (somme des lignes du triangle de Pascal)

Pour tout entier n :

Démonstration.

▷ **Exercice 11.**

III. Systèmes linéaires

A. Définitions

Dans cette partie n et p désignent deux entiers naturels non-nuls.

Définition

Un *système linéaire* de n équations à p inconnues est un ensemble S de n équations linéaires à p *inconnues* $x_1, \dots, x_p$:

- Les réels a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ sont les *coefficients* du système.
- Les réels b_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ forment le *second membre* du système.
- On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes du système.

Exemple 13.

(i) $S_1 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ $\qquad S_2 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$ $\qquad S_3 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

On constate qu'il s'agit de déterminer l'intersection de deux droites du plans.

(ii) $S_4 : \begin{cases} 4x + 2y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$

Ici il s'agit de l'intersection de trois plan de l'espace. L'ensemble des solutions peut être réduit à un point, ou être vide, ou être infini.

(iii) Cas extrêmes. $\qquad S_5 : 2x = -5 \qquad S_6 : 3x + 2y = 11 \qquad S_7 : \begin{cases} 2x = 2 \\ 5x = 7 \end{cases}$

On constate que le nombre de solutions peut être nul ou infini.

Définition

Une *solution* de S est un p-uplet de nombres $x = (x_1, \dots, x_p)$ satisfaisant toutes les lignes du système. La *résolution* d'un système consiste à déterminer toutes ses solutions.

Théorème

Un système linéaire admet ou bien une infinité de solution, ou bien une unique solution, ou sinon aucune solution.

B. Algorithme du pivot de Gauss

Définitions

Les *opérations élémentaires* sur un système linéaire sont :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$	ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par α	$(i \neq j,\ \alpha \in \mathbb{R})$
$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$	multiplication de la ligne i par λ	$(\lambda \in \mathbb{R}^*)$
$(L_i \leftrightarrow L_j)$	interversion des lignes i et j.	

Proposition

Toute opération élémentaire est inversible :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ admet pour opération inverse

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ admet pour opération inverse

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ admet pour opération inverse

Ainsi on ne change pas les solutions d'un système linéaire en lui appliquant des opérations élémentaires.

Exemple 14. Résolution des systèmes :

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad S_9 : \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 7y \phantom{{}-2z} = 7 \\ 2x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$$

Méthode : pivot de Gauss

On utilise uniquement des opérations élémentaires.
On essaie d'*échelonner* puis de *réduire* le système.

$$1. \begin{cases} \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \phantom{x+{}} \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \phantom{x+{}} \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \phantom{x+{}} y + \bullet z = \bullet \\ \phantom{x+y+{}} \bullet z = \bullet \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \phantom{x+{}} y + \bullet z = \bullet \\ \phantom{x+y+{}} z = \bullet \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x + \bullet y \phantom{{}+z} = \bullet \\ \phantom{x+{}} y \phantom{{}+z} = \bullet \\ \phantom{x+y+{}} z = \bullet \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x \phantom{{}+y+z} = \bullet \\ \phantom{x+{}} y \phantom{{}+z} = \bullet \\ \phantom{x+y+{}} z = \bullet \end{cases}$$

Dans certains cas ceci est impossible, car il n'existe par obligatoirement une et une seule solution.

Exemple 15. Résolution du système :

$$S_{10} : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \\ 2x + y \phantom{{}+4z} = 2 \end{cases}$$

C. Écriture matricielle

Définitions

Soit S un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On définit la matrice A, et les matrices-colonnes X et B par :

On dit que A est la *matrice du système linéaire* S. Le système s'écrit alors :

$$S : AX = B$$

Cette écriture est l'*écriture matricielle* du système S.

Exemple 16. Résolution matricielle du système :

$$S_{11} : \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 7x + 9y = 1 \end{cases}$$

Méthode : pivot de Gauss, version matricielle

Les opérations élémentaires sur les lignes peuvent être appliquées sur la représentation matricielle, elles modifient les matrices A et B mais pas la matrice X.

1. $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

Méthode : pivot de Gauss, cas général

1. $\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

▷ **Exercices 12, 13.**

Exemple 17 (avec paramètre). Soit λ un paramètre. Résoudre le système :

$$S_{12} : \begin{cases} x + 3y = 1 \\ \lambda x + y = 0 \end{cases}$$

▷ **Exercice 14.**