Chapitre A2
Calculs algébriques

I. Calculs sur les réels

A. Ensembles de nombres

Notations. L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$.
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$$

L'ensemble des entiers relatifs ou plus simplement des entiers est noté $\mathbb{Z}$.

Pour tout réel x on pose :

$$x\mathbb{N} = \{xn \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad x\mathbb{Z} = \{xn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples.
(i) $2\mathbb{N}$ est l'ensemble de entiers naturels pairs.
(ii) $3\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 3.
(iii) On peut définir $\mathbb{Z}$ par : $\quad \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$
(iv) L'ensemble de définition de la cotangente est $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Définition. L'ensemble des nombres rationnels est :

Proposition. *Soit r un rationnel. Alors il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ et p, q sont premiers entre eux.*
Cette écriture est appelée forme irréductible de r.

Remarque. Le développement d'un nombre rationnel non décimal en base quelconque présente une ration.

Exemple 1. Développement décimal de : $\frac{2}{3}$ $\quad \frac{25}{9}$ $\quad \frac{4}{11}$ $\quad \frac{2}{7}$

Définition. Soit i un nombre vérifiant $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + iy$ où x et y sont deux réels :

Ces nombres sont appelés nombres complexes.

Exemple 2. Les ensembles de nombres vérifient les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Notations. On note $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ les ensembles respectifs $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ privés de 0.
On note $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ les ensembles des réels respectivement positifs, négatifs, strictement positifs, strictement négatifs.

B. Valeur absolue

Rappel. Deux définitions équivalentes de la valeur absolue :

Proposition. *Pour tous réels x et y :*

Proposition (Inégalités triangulaires). *Pour tous réels x et y :*

L'égalité dans l'inégalité de droite a lieu si et seulement si x et y sont de même signe. L'égalité dans l'inégalité de gauche a lieu si et seulement si x et y sont de signes opposés.

En remplaçant y par $-y$:

Proposition. *Soit a un réel strictement positif. Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} |x| \leqslant a \quad \Longleftrightarrow \\ \\ |x| \geqslant a \quad \Longleftrightarrow \end{cases}$$

Proposition. *Pour tous réels a et b, b étant positif :*

$$|x-a| \leqslant b \qquad \Longleftrightarrow$$

▷ **Exercice 1.**

Proposition. *Soit x un réel. Alors :*

Démonstration. Le sens indirect est évident, le sens direct se démontre par l'absurde. En effet, si x est non-nul alors on pose $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, on a alors l'existence d'un ε strictement positif tel que $|x| > \varepsilon$. □

C. Racine carrée

Définition. La racine carrée d'un réel positif x est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$. On note $y = \sqrt{x}$.

Proposition. *Pour tous réel positifs x et y :*

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Remarque. Attention :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x}^2 = \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} =$$

▷ **Exercice 2.**

D. Puissances

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note : $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Exemple.

$$x^0 = \qquad x^1 = \qquad x^{-1} =$$

Proposition. *Pour tous complexes x et y et tous entiers m et n, sous réserve d'existence :*

$$x^m x^n = \qquad (x^m)^n = \qquad (xy)^n =$$

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ la racine n-ème de x, c'est-à-dire l'unique réel positif y tel que $y^n = x$.

Remarques.

(i) La définition ci-dessus est valable pour tout réel positif x. Mais dans le cas où n est un entier positif impair alors la racine n-ème d'un réel négatif x est définie, c'est l'unique réel y tel que $y^n = x$.

(ii) Si x est un réel strictement positif alors on peut définir, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) : $\quad x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

Exemples. Calculer :

$16^{\frac{1}{2}} =$	$27^{\frac{4}{3}} =$	$2^{-\frac{1}{2}} =$	$100^{\frac{5}{2}} =$
$5^{-2} =$	$4^{\frac{7}{2}} =$	$9^{\frac{1}{3}} =$	$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$
$8^{-\frac{2}{3}} =$	$1^{-\frac{5}{6}} =$	$64^{\frac{1}{6}} =$	$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$

II. Sommes et produits

A. Définitions

Soit n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$.

Notation. Étant donnés des nombres a_1, $a_2, \dots, a_n$ on note :

En posant $I = \{1, 2, \dots, n\}$, on note également :

Exemple.

$$\sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{i=6}^{11} a_i =$$

Remarque. On dit que i est une variable muette :

Ce n'est pas le cas de n !

On notera parfois $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ car cette quantité dépend de n mais pas de k.

Exemple. En gardant la notation pour S_n, compléter :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = S_{n-1} +$$

B. Exemples

Exemple 3. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{k^2}{k+1}$

Exemple 4. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k \qquad \sum_{k=1}^{2} k \qquad \sum_{k=1}^{3} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k$

La formule générale est due selon l'anecdote à C. F. Gauss (1777 – 1855).

Proposition (somme des premiers entiers).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

<u>Démonstration</u>. En alternant, ou géométriquement, ou encore par récurrence. □

Proposition (somme des premiers carrés, des premiers cubes).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

▷ **Exercices 3, 4.**

Remarque (somme vide, produit vide).

Par convention si $m > n$ alors : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$

Par exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} a_k =$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} a_k =$

Ceci est cohérent avec la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ dans le cas où $m = 0$.

Remarque (Autres notations).

$\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 9\\ k \text{ pair}}} a_k =$ $\displaystyle\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} a_i =$

C. Propriétés

Notation. On note $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Proposition (linéarité). *Pour toutes familles de nombres $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \textit{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Démonstration. Il suffit des développer les sommes. □

Proposition. *Avec les mêmes notations :*

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \qquad\qquad \textit{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda a_k =$$

Remarque.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} 6 = \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} 4 =$$

Exemple 5. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(6k-5)$

Exemple 6 (Changement d'indice). Calculer $\displaystyle\sum_{k=9}^{29} k$ de deux manières différentes :

a. En complétant : $\displaystyle\sum_{k=9}^{29} k = \sum_{k=1}^{29} k - \sum_{k=*}^{*} k = \cdots$

b. Grâce au changement d'indice $\ell = k - 8$.

▷ **Exercice 5.**

Exemple 7. Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$: par changement d'indice, puis en simplifiant $k^2 - (k-1)^2$.

Remarque (Sommes télescopiques).

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} =$$

▷ **Exercices 6, 7.**

D. Sommes de suites

Rappel. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un complexe r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Ce complexe r est appelé raison de la suite (u_n).
Par propriété, si la suite (u_n) est arithmétique de raison r alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Proposition (somme des termes d'une suite arithmétique).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

Plus généralement :

Démonstration. À savoir faire en exercice. □

Rappel. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un complexe q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

Ce complexe q est appelé raison de la suite (u_n).
Par propriété, si la suite (u_n) est géométrique de raison q alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0q^n$$

Proposition (somme des termes d'une suite géométrique).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

Plus généralement :

Démonstration.

Corollaire. *Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:*

Exemple 8. Vérification pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, puis $n = 1$ et $n = 0$.

Démonstration.

▷ **Exercice 8.**

E. Sommes doubles

Exemple 9 (sommes rectangulaires). Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}ij$

Exemple 10 (sommes triangulaires). Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}j$

On remarque que ces deux sommes sont égales.

Notation. On considère une famille (a_{ij}) de réels indexée par deux familles. On note :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_{ij}$$

▷ **Exercice 9.**

III. Coefficients binomiaux

A. Factorielle

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ et on appelle factorielle de n cet entier.

Exemple. Les premières factorielles :

Exemple 11. Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = \qquad \frac{11!}{12!} = \qquad \frac{100!}{98!} = \qquad \frac{10!}{(5!)^2} =$$

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$:* $\quad (n+1)! = (n+1)\,n!$

▷ **Exercice 10.**

B. Coefficients du binôme

Définition. Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. On note :

Si k est inférieur à 0 ou supérieur à n alors on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Ces nombres (nous verrons qu'ils sont entiers) sont appelés coefficients binomiaux, et $\binom{n}{k}$ se lit «k parmi n».

Exemples. Valeurs remarquables :

$\binom{n}{0} =$ $\binom{n}{n} =$ $\binom{n}{1} =$ $\binom{n}{2} =$

Proposition (Symétrie). *Pour tous entiers n et k :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration.

Proposition (Formule de Pascal). (Blaise Pascal, France, 1623 –1662)
Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

Démonstration. Si $k < 0$ ou $k > n$ la formule est immédiate : $0 + 0 = 0$.

Si $k = 0$ alors la formule donne $0 + 1 = 1$. Si $k = n$ alors elle donne $1 + 0 = 1$.

Supposons maintenant que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Une autre démonstration viendra dans le chapitre sur les ensembles. □

Définition. Le triangle de Pascal permet de calculer les premiers coefficients binomiaux.

Proposition. *Pour tout* $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ *le coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ *est un entier naturel.*

Démonstration.

Proposition (formule du binôme de Newton).
Soit n un entier naturel, a et b deux complexes. Alors :

Exemple 12. Pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Remarque. Pour $(a - b)^n$ on alterne les signes.

Démonstration.

Exemple 13. Calculer $10{,}2^5$.

▷ **Exercice 11.**

Proposition (somme des lignes du triangle de Pascal). *Pour tout entier n :*

Démonstration.

▷ **Exercice 12.**

IV. Systèmes linéaires

A. Définitions

Dans cette partie n et p désignent deux entiers naturels non-nuls.

Définition. Un système linéaire de n équations à p inconnues est un ensemble S de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \dots, x_p$:

- Les réels a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ sont les coefficients du système.
- Les réels b_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ forment le second membre du système.
- On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes du système.

Exemple 14.

(i) $S_1 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ $\quad S_2 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$ $\quad S_3 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

On constate qu'il s'agit de déterminer l'intersection de deux droites du plans.

(ii) $S_4 : \begin{cases} 4x + 2y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$

Ici il s'agit de l'intersection de trois plan de l'espace. L'ensemble des solutions peut être réduit à un point, ou être vide, ou être infini.

(iii) Cas extrêmes. $\quad S_5 : 2x = -5 \quad S_6 : 3x + 2y = 11 \quad S_7 : \begin{cases} 2x = 2 \\ 5x = 7 \end{cases}$

On constate que le nombre de solutions peut être nul ou infini.

Définition. Une solution de S est un p-uplet de nombres $x = (x_1, \dots, x_p)$ satisfaisant toutes les lignes du système. La résolution d'un système consiste à déterminer toutes ses solutions.

Théorème. *Un système linéaire admet ou bien une infinité de solution, ou bien une unique solution, ou sinon aucune solution.*

B. Algorithme du pivot de Gauss

Définitions. Les opérations élémentaires sur un système linéaire sont :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$	ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par α	$(i \neq j,\, \alpha \in \mathbb{R})$
$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$	multiplication de la ligne i par λ	$(\lambda \in \mathbb{R}^*)$
$(L_i \leftrightarrow L_j)$	interversion des lignes i et j.	

Proposition. *Toute opération élémentaire est inversible :*

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ *admet pour opération inverse*

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ *admet pour opération inverse*

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ *admet pour opération inverse*

Ainsi on ne change pas les solutions d'un système linéaire en lui appliquant des opérations élémentaires.

Exemple 15. Résolution des systèmes :

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad S_9 : \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 7y \phantom{{}-2z} = 7 \\ 2x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$$

Méthode. On utilise uniquement des opérations élémentaires.

On essaie d'*échelonner* puis de *réduire* le système.

$$1. \begin{cases} \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ y + \bullet z = \bullet \\ \bullet z = \bullet \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ y + \bullet z = \bullet \\ z = \bullet \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x + \bullet y = \bullet \\ y = \bullet \\ z = \bullet \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x = \bullet \\ y = \bullet \\ z = \bullet \end{cases}$$

Dans certains cas ceci est impossible, car il n'existe par obligatoirement une et une seule solution.

Exemple 16. Résolution du système :

$$S_{10} : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \\ 2x + y \phantom{{}+4z} = 2 \end{cases}$$

▷ **Exercices 13, 14, 15.**