TD. A2
Calculs algébriques

Exercices de cours

(1) Démontrer par récurrence la propriété :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pour l'hérédité on démontrera : $\mathscr{P}_{n-1} \Longrightarrow \mathscr{P}_n$

(2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

a. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.
b. Énoncer une conjecture pour une expression générale de S_n sans signe somme et la démontrer.

(3) Calculer $\sum_{k=0}^{19} (k+1)^2$ par linéarité, puis en posant $\ell = k+1$.

(4) Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et en déduire une autre démonstration du résultat de l'exercice 2.

(5) Écrire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ sans signe somme.

(6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

(7) Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2} u_n$$

a. Déterminer le terme général de (u_n)
b. Démontrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
c. Calculer la somme de ses 10 premiers termes.

(8) Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$

(9) Écrire à l'aide de factorielles et de puissances :

$$A = 10 \times 11 \times \cdots \times 30$$
$$B = 3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times 30$$
$$C = 10 \times 12 \times 14 \times \cdots \times 30$$
$$D = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 29$$

(10) Calculer $2{,}1^4$ en utilisant l'égalité $2{,}1 = 2 + 0{,}1$ puis 99^3 en utilisant l'égalité $99 = 100 - 1$.

(11) Calculer : $\sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-2)^k$ et $\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} 2^k$

(12) Résoudre les systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} y + z = 13 \\ x + z = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + 3z = 7 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

(13) Résoudre les systèmes :

$$S_3 : \begin{cases} 7x - 5y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - y = 4 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} -5x + 4y - 3z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

(14) Soit λ un paramètre. Résoudre le système :

$$S_6 : \begin{cases} \lambda x + 2y - z = 0 \\ 2x + (\lambda - 3)y + 2z = \lambda - 4 \\ -x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$$

Travaux dirigés

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1)$$

a. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3.
b. Établir une conjecture donnant une expression de S_n sans signe Σ, puis la démontrer.

2 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

a. Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

b. En déduire une simplification de $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

3 Calculer les sommes et produits suivants.

$a = \sum_{k=11}^{50} k$ $\qquad$ $b = \sum_{k=4}^{22} (k+1)(k-3)$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)$ $\qquad$ $d_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$

$e = \sum_{k=7}^{27} (3k-20)$ $\qquad$ $f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

$g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 3^{n-k}$ $\qquad$ $h_n = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 4^k 5^{8-k}$

$i_n = 2^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{-k}$ $\qquad$ $j_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}$

$k_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{3^i}$ $\qquad$ $l_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$

$m_n = \sum_{k=0}^{n} k.k!$ $\qquad$ $n_p = \prod_{k=1}^{p} \frac{k-2}{k+2}$

$o_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ $\qquad$ $p_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$

Pour la dernière, on calculera $p_n - p_{n-1}$.

4 On suppose que les formules pour $\sum k$ et $\sum k^2$ ne sont pas connues.

Exprimer $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$ de deux façons différentes : par linéarité et par changement d'indice.

Que démontre-t-on ainsi ?

5 Le but de cet exercice est de démontrer la formule donnant la somme des n premiers carrés. On suppose connue la formule donnant la somme des n premiers entiers.

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Simplifier S_n de deux façons différentes : en développant le cube et en changeant l'indice.
b. Conclure.

6 Reproduire l'exercice précédent avec

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^4$$

pour démontrer la formule donnant la somme des n premiers cubes.

7 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a. $2^n \geqslant n+1$ $\qquad$ b. $\sqrt{n(n+1)} \leqslant n + \frac{1}{2}$

c. $\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{4^k} \leqslant 4$ $\qquad$ d. $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

e. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

8 Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant a$ (où a est un entier à préciser) :

a. $5^n \geqslant 4^n + 3^n$ $\qquad$ b. $2^n \geqslant n^2$

9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

a. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

b. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \geqslant \frac{4n+2}{6}\sqrt{n}$.

c. Déterminer la limite de $\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$.

10 Calculer les sommes doubles suivantes.

$a = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{4} i^2 3^j$ $\qquad$ $b_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i$

$c_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (3i - 2j)$ $\qquad$ $d_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1$

$e_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ $\qquad$ $f_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 3^j$

$g_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 3^i$ $\qquad$ $h_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j^2$

$i_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{Min}\,(i,j)$ $\qquad$ $j_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$

11 a. Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

On note $(x_1, \ldots, x_n)$ une suite de n réels.

b. Déduire de la question précédente que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

puis que : $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

c. Retrouver le résultat démontré ci-dessus en calculant le discriminant du polynôme du second degré $P(t) = \sum_{k=1}^{n} (t + x_k)^2$.

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

a. Démontrer que pour tous entiers strictement positifs n et k : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

b. En déduire la valeur de A_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $f(x) = (x+1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

c. Développer $f(x)$.

d. Dériver les deux expressions de f, et retrouver ainsi le résultat pour A_n.

13 Soit n un entier naturel.

a. Démontrer que pour tous entiers i et j tels que $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$: $\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}$

b. Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$$

a. Établir une conjecture pour la valeur de ces sommes.

b. Démontrer cette conjecture en calculant $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$.

15 Soit n un entier naturel.

a. Pour tout $k = \{0, \dots, n\}$ simplifier : $\dfrac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}}$

b. En déduire une simplification de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

16 Soit p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

a. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Interpréter cette égalité sur le triangle de Pascal.

b. Retrouver les formules donnant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers carrés en appliquant la formule de la question précédente pour $p = 1$ et $p = 2$.

17 Résoudre les systèmes suivants.

a. $\begin{cases} 2x + 9y = 2 \\ x + 7y = -4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 11x + 6y = 1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 237x + 233y = 2390 \\ 233x + 237y = 2310 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 7x - y = 3 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 3x + 7y = 23 \\ 6x - y = 16 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 51x + 59y = 7 \\ 39x + 51y = 3 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y + 5z = 8 \end{cases}$ h. $\begin{cases} 5x - 6y = a \\ 6x - 7y = a + 1 \end{cases}$ i. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 4 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 5x + 3z = 9 \end{cases}$ k. $\begin{cases} x + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \end{cases}$ l. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 5x - 2y + 2z = 1 \\ -3x + y + z = 2 \end{cases}$

18 Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon la valeur des paramètres réels a et λ.

a. $\begin{cases} 12x - 15y = a \\ 8x - 10y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} ax - 2y = 4 \\ 3x + y = a \end{cases}$ c. $\begin{cases} 7x - 3y = 3 \\ x + 3y = 0 \\ 3x + y = a \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \\ x - 5y + 5z = a \end{cases}$ e. $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 + \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = 1 + \lambda \\ x + y + \lambda z = 2\lambda \end{cases}$ f. $\begin{cases} \lambda x - y = a \\ \lambda y - z = a \\ \lambda z - x = a \end{cases}$