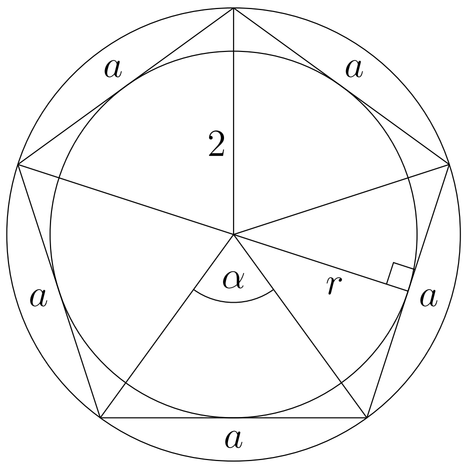
Devoir à la Maison n°1

Exercice 1.

1. Résoudre l'équation : $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$.
2. Résoudre l'équation : $\cos(5t) = 0$.
3. Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(5t)$ en fonction de $\cos(t)$.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\cos\frac{3\pi}{10}$.
5. Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$, puis $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.
   On pourra utiliser le développement de $(\sqrt{5}+1)^2$.
6. Sur certains billets de banque de l'Azerbaïdjan figure le schéma suivant :



   Quelle est la valeur de r ?

Exercice 2.

Soit O et I les points du plan de coordonnées respectives $(0,0)$ et $(1,0)$.
Soit x un élément de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, et A le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $\widehat{IOA}$ admet x pour mesure.
Soit B le point d'intersection de la droite (OA) avec la droite d'équation $x = 1$.
On représentera ces données sur une figure.

1. Quelle est l'aire de la portion de disque délimitée par la droite (OI), la droite (OA), et le cercle trigonométrique ?
   Quelles sont les aires des triangles OIA et OIB ?

Il est demandé de ne pas utiliser la notion de dérivée dans la question suivante.

2. Justifier que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

3. En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

4. Démontrer que l'encadrement de la question précédente est valable aussi pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.
5. Calculer les limites :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

6. On suppose maintenant que x est un réel quelconque fixé. Calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

   Que peut-on en déduire ?