

Devoir à la Maison n°1

Soit x un réel fixé non multiple de π : $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Pour tout entier strictement positif n on pose : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx)$.

1. Question préliminaire.

(a) Démontrer la *formule de transformation de produit en somme* suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

(b) Démontrer la *formule de transformation de somme en produit* suivante :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2 \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n(x) = \frac{\cos((n-1)x) \sin(nx)}{\sin x}$$

3. Une autre méthode : transformer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le produit $\sin x \cos(2kx)$ en somme de fonctions trigonométriques.

En déduire par télescopage une formule pour $(\sin x)S_n(x)$, puis retrouver la formule pour $S_n(x)$.

4. (a) Écrire la formule des deux questions précédentes pour $n = 5$ et $x = \frac{\pi}{5}$.

En déduire une formule reliant $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

(b) Démontrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine du polynôme $4X^2 + 2X - 1$.

5. (a) Calculer la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

(b) Calculer les valeurs de $\sin \frac{2\pi}{5}$ et $\tan \frac{2\pi}{5}$.

Donner celles-ci sous la forme $\frac{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}{d}$ où a, b, c, d sont des entiers.

6. Calculer les cosinus, sinus et tangente de $\frac{\pi}{10}$ puis de $\frac{\pi}{5}$.

En donner des expressions aussi simples que les précédentes.