Chapitre A3
Fonctions d'une variable réelle

I. Généralités sur les réels

A. La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition. L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$.

Proposition. *La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible à la somme et à la multiplication par un réel positif. En d'autres termes, pour tous réels a, b, c, d :*

$$\begin{aligned} & a \leqslant b \quad \textit{et} \quad c \leqslant d && \Longrightarrow \quad a+c \leqslant b+d \\ \textit{et} \qquad & 0 \leqslant a \leqslant b \quad \textit{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d && \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ac \leqslant bd \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} a \leqslant 0 \quad \textit{et} \quad b \leqslant c \quad & \Longrightarrow \quad ab \geqslant ac \\ 0 < a \leqslant b \quad & \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} \\ \textit{et} \qquad a \leqslant b < 0 \quad & \Longrightarrow \quad \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0 \end{aligned}$$

Proposition. *Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs.*

Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ *alors*

Proposition. *Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.*

Si $n > m$ *alors*

B. Intervalles

Définition. On appelle intervalle une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant :

Exemples.

Sont des intervalles :

Ne sont pas des intervalles :

Remarques.

(i) L'intersection de deux intervalles est un intervalle, l'union ne l'est pas en général, ni le complémentaire.

(ii) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et a un réel. Alors l'ensemble des réels x tels que $|x-a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a-r, a+r]$.

Proposition. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors I est un intervalle si et seulement si pour tout couple de réels (a,b) de I tel que $a \leqslant b$:* $[a,b] \subseteq I$.

C. Majorant, minorant

Définitions.

(i) On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si :

Le réel M est alors appelé un majorant de A.

(ii) De même on dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est minorée si :

Le réel m est alors appelé un minorant de A.

(iii) Une partie est bornée si elle est majorée et minorée.

Définitions. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Un maximum de A est un majorant de A appartenant à A. On le note $\mathrm{Max}(A)$.

(ii) Un minimum de A est un minorant de A appartenant à A. On le note $\mathrm{Min}(A)$.

Exemple 1.

(i) L'intervalle $[-6, 4[$ est borné, il admet un minimum mais pas de maximum.

(ii) Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Remarque. Si A admet un maximum alors ce maximum est unique.

Remarque. Une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée si :

Remarques.

(i) Si une partie A de $\mathbb{R}$ est finie alors elle admet un minimum et un maximum.

Cas des ensembles d'entiers :

(ii) Si une partie A de $\mathbb{N}$ est majorée alors elle est finie, et si de plus elle est non vide alors elle admet un maximum.

(iii) Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

II. Généralités sur les fonctions

A. Définitions

On note E et F deux parties non-vides de $\mathbb{R}$.

Définition. Soit f une fonction de E dans F.
On dit que E est l'ensemble de départ (et non l'ensemble de définition) et F est l'ensemble d'arrivée de la fonction f.
Le sous-ensemble

$$\Gamma = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in E \right\}$$

est appelé graphe de f.
Si x est un élément de E et $y = f(x)$, alors y est appelé image de x par f, et x est appelé antécédent de y par f.

Notation. On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions de E dans F.

Remarques. Soit f une fonction de E dans F.

(i) Si x est élément de E alors x admet une et une seule image, il s'agit de $f(x)$.

(ii) Si y est un élément de F, alors y peut ne pas avoir d'antécédent, en avoir un seul, ou en avoir plusieurs.

Notation. Si f est une fonction de E dans F alors on note :

Remarques.

(i) L'ensemble $f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \}$ est appelé image de f. Il est inclus dans F.

(ii) La donnée des ensembles de départ et d'arrivée fait partie de la définition d'une fonction.

Exemple 2. Les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

sont différentes.

Exemples et définitions.

(i) La fonction $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est appelée identité de E.

(ii) Soit f une fonction de E dans F, et A une partie de E.
La fonction $f_{|A} : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est appelée restriction de f à A.

(iii) Si $g : A \to F$ et $f : E \to F$ sont deux fonctions telles que $g = f_{|A}$, alors on dit que f est un prolongement de g à E.

(iv) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

est appelée fonction indicatrice de l'ensemble A.

B. Opérations

On note pour toute la suite D, E, F des parties de $\mathbb{R}$.

Définition. Si $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, alors $(f+g)$ et fg sont les fonctions de D dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in D \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

On définit également les fonctions λf (où λ est un réel), $f - g$, $\frac{f}{g}$ si g est à valeurs non-nulles.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subseteq E$.
On note $g \circ f$ et on appelle composée de f et de g la fonction :

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque. La composée de f et de g est définie si et seulement si $f(D) \subseteq E$, *i.e.*, :

$$\forall x \in D \qquad f(x) \in E$$

Exemple 3. Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Sur quel ensemble est définie $g \circ f$?

Exemple 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exemple 5. Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors

$\mathrm{Id}_F \circ f =$ $\qquad$ $f \circ \mathrm{Id}_E =$

C. Parité et périodicité

Exemple 6. Soit f la fonction exponentielle. Tracer les graphes des fonctions :

$$f_1 : x \mapsto f(x) \qquad f_2 : x \mapsto f(x)+2 \qquad f_3 : x \mapsto f(x+2)$$
$$f_4 : x \mapsto f(-x) \qquad f_5 : x \mapsto -f(x) \qquad f_6 : x \mapsto f(2x) \qquad f_7 : x \mapsto 2f(x)$$

Définitions. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite paire si :
(i) D est symétrique par rapport à 0 *(ii)* $\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$
Elle est dite impaire si :
(i) D est symétrique par rapport à 0 *(ii)* $\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque. On résume les deux propriétés de la façon suivante :
La fonction f est paire si

Elle est impaire si

Remarques.

(i) La fonction f est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, elle est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(ii) Si une fonction est paire ou impaire alors on peut restreindre son étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et obtenir le reste de la courbe par symétrie.

▷ **Exercice 1.**

Définition. Soit T un réel strictement positif. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite périodique de période T, ou T-périodique, si :

Remarque. Si f est périodique de période T alors on peut restreindre son étude à un intervalle de longueur T, comme $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. On obtiendra le reste de la courbe par translations successives de vecteur $T\vec{\imath}$.

Exemple 7. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π. La fonction tangente est périodique de période π.

▷ **Exercices 2, 3.**

D. Extrema

Définition. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est majorée, respectivement minorée, bornée si la partie $f(D)$ de $\mathbb{R}$ est majorée, respectivement minorée, bornée.

Remarque. En d'autres termes, la fonction f est majorée si :

Graphiquement, ceci signifie que la courbe de f est en-dessous de la droite d'équation $y = M$.

Remarque. La fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

Définition. La fonction f admet un maximum sur D si il existe $x_0 \in D$ tel que $f(x_0)$ soit un majorant de f sur D :

Dans ce cas $f(x_0)$ est le maximum de l'ensemble $f(D)$.

On définit de même le minimum de f sur D.

Notation. S'il existe le maximum de f sur D est noté :

S'il existe le minimum est noté :

Exemple 8. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$

Alors la fonction f est minorée mais elle n'admet pas de minimum.

E. Croissance

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est

- croissante sur D si :

- décroissante sur D si :

- strictement croissante sur D si :

- strictement décroissante sur D si :

- monotone sur D si elle est croissante ou décroissante.
- strictement monotone sur D si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque. Soit f et g deux fonctions réelles telles que $g \circ f$ est définie.
Si f et g sont croissantes alors $g \circ f$ est croissante.
Si f est croissante et g est décroissante alors $g \circ f$ est décroissante.
Etc.

Exemple 9. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle croissante ? Décroissante ?

III. Dérivation

A. Définitions

Rappel sur les droites du plan.

- L'équation d'une droite est de la forme $y = ax + b$ ou $x = b$.
- Le vecteur de coordonnées $(1, a)$ ou $(0, 1)$ est directeur de la droite.
- Pour tracer la droite d'équation $y = ax + b$ on place le point $(0, b)$ puis on utilise le vecteur directeur.
- Si deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont donnés, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. La valeur de b est calculée ensuite.

▷ **Exercices 4, 5.**

On note toujours D une partie de $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et x_0 un élément de D. On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

On note alors :

Ce réel est appelé nombre dérivé de f en x_0.

Proposition. *La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse x_0 admet pour équation :*

Définition. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable ou dérivable sur D si elle est dérivable en tout point x_0 de D.

Dans ce cas la fonction $\begin{array}{rccl} f' : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ est appelée dérivée de f.

Proposition. *Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition sauf :*

- *La fonction racine carrée qui est définie (et continue) sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *La fonction valeur absolue qui est définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
- *Les fonctions* arccos *et* arcsin *qui sont définies (et continues) sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $]-1, 1[$.*

Exemple 10. La fonction carré est dérivable.

▷ **Exercices 6, 7.**

B. Applications : croissance et extrema

Proposition. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors*

- *f' est positive si et seulement si f est croissante.*
- *f' est négative si et seulement si f est décroissante.*
- *f' est nulle si et seulement si f est constante.*
- *Si f' est strictement positive alors f est strictement croissante.*
- *Si f' est strictement négative alors f est strictement décroissante.*

Proposition. *Avec les mêmes notations :*

(i) Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.

(ii) Si f' est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Démonstration du *(i)*. Si f' est positive alors f est croissante.

Si f n'est pas strictement croissante alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Pour tout élément x de $[x_1, x_2]$, comme $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ alors par croissance $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$. Ainsi f est constante sur $[x_1, x_2]$, donc sa dérivée y est nulle. Or l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient une infinité de points, ce qui constitue une contradiction. □

Corollaire. *Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Si $f' = g'$ alors il existe une constante K telle que $f = g + K$,* i.e.,

$$\forall x \in I \qquad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. On pose $h = f - g$. La fonction h est dérivable par soustraction, f et g étant dérivables. De plus par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Ainsi h' est nulle sur l'intervalle I, donc h est constante sur cet intervalle. Il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in I \qquad h(x) = K$$

Ceci donne $f(x) = g(x) + K$ pour tout $x \in I$. □

Remarque. Les propriétés précédentes ne sont valables que sur un intervalle !

Exemple 11. La fonction sgn : $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est dérivable, de dérivée nulle, mais pas constante.

Corollaire. *Soit f une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$. Si f' est positive (respectivement négative, nulle) alors f est croissante (respectivement décroissante, constante) sur tout intervalle de D.*

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et x_0 un point intérieur de I,* i.e., *tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq I$.*
Si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration.

Remarques.

(i) Le tableau de variations d'une fonction est construit en étudiant le signe de sa dérivée. Les points où celle-ci est nulle sont des extrema potentiels, les variations permettent de décider s'ils sont effectivement des extrema et leur nature.

(ii) La réciproque de cette proposition est fausse.

Exemple 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

C. Dérivées usuelles

Proposition (Dérivées des fonctions usuelles).

Fonction	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'$	*Dérivée*	*Fonction*	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'$	*Dérivée*
C				$\cos x$			
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$				$\sin x$			
$\frac{1}{x}$				$\tan x$			
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$				$\arcsin x$			
$\sqrt{x}$				$\arccos x$			
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$				$\arctan x$			
$\lvert x\rvert$				$\operatorname{ch} x$			
e^x				$\operatorname{sh} x$			
$\ln x$				$\operatorname{th} x$			

D. Opérations

Proposition. *Soit u et v deux fonctions dérivables sur une partie D. Alors les fonctions $u+v$, λu (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), uv et $\frac{u}{v}$ (si elle est définie) sont dérivables sur D et leurs dérivées sont :*

$(u+v)' =$ $\qquad$ $(uv)' =$

$(\lambda u)' =$ $\qquad$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' =$

Démonstration. Il suffit de démontrer que pour tout $x_0 \in D$ ces fonctions sont dérivables en x_0. On note donc x_0 un élément de D.

(i) Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

Comme u et v sont dérivables en x_0 alors le membre de droite admet une limite finie lorsque x tend vers x_0, et donc le membre de gauche admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Ainsi $(u+v)$ est dérivable en x_0 et par passage à la limite :

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

(ii) (Exercice) On démontre de même que la fonction λu est dérivable en x_0 et que $(\lambda u)'(x_0) = \lambda\, u'(x_0)$.

(iii) Cas du produit uv.

(iv) Cas du quotient $\frac{u}{v}$: voir ci-dessous. □

▷ **Exercice 8.**

Proposition. *Soit* $u : D \to \mathbb{R}$ *et* $v : E \to \mathbb{R}$ *deux fonctions composables (*i.e., $u(D) \subseteq E$*).*
Si u *et* v *sont dérivables alors* $v \circ u$ *est dérivable et :*

Exemple 13. Dériver les fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \cos(2x) \qquad f_2(x) = e^{-x} \qquad f_3(x) = (4x-3)^5$$

$$f_4(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_5(x) = \ln(\sin x) \qquad f_6(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Remarque. Si $f(x) = u(ax+b)$ alors $f'(x) = a\,u'(ax+b)$.
Autre cas particuliers :

$(e^u)' =$ $(\ln u)' =$ $\left(\frac{1}{u}\right)' =$

$\sqrt{u}' =$ $(u^\alpha)' =$

Démonstration de la formule de dérivation du quotient $\frac{u}{v}$.

▷ **Exercice 9.**

Exemple 14. Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles définies ? dérivables ?

$$f(x) = \sqrt{4-x} \qquad g(x) = x\sqrt{|x|}$$

▷ **Exercice 10.**

E. Dérivées n-èmes

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit par récurrence les dérivées n-èmes de f de la façon suivante.

On pose $f^{(0)} = f$ et on admet que toute fonction est dérivable 0 fois.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que f est dérivable n fois sur D si elle est dérivable $n-1$ fois et si sa dérivée $(n-1)$-ème est dérivable. On note alors $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$ et on appelle dérivée n-ème de f sur D la fonction $f^{(n)}$.

Remarques.

(i) En particulier $\quad f^{(0)} = f \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

(ii) On note $\quad f' = f^{(1)} \quad f'' = f^{(2)} = (f')' \quad f''' = f^{(3)} = (f'')' \quad$ etc.

Définition. Les fonctions $f^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont aussi appelées dérivées successives de f.

Exemple 15. Calcul des dérivées successives de :

$$f(x) = e^x \qquad f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 12x + 1 \qquad f(x) = \cos x$$

▷ **Exercice 11.**

IV. Continuité

A. Définition

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et x_0 un point de D.

On dit que f est continue en x_0 si :

On dit que f est continue ou continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Remarques.

(i) Toutes les fonctions usuelles du programme sont continues sur leur ensemble de définition sauf la fonction partie entière.

(ii) Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions continues sont continues.

Proposition. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

B. Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux points de I, tels que $a < b$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.*

Corollaire. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.*

Démonstration du corollaire. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du corollaire. Soit d compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Comme f est continue alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c) = f(c') = d$.

Si $c < c'$ ou $c > c'$ alors $f(c) < f(c')$ ou $f(c) > f(c')$, ce qui est impossible car $f(c) = f(c')$. Donc $c = c'$.

Ceci démontre l'unicité du point c. $\square$

V. Fonctions classiques

A. Fonctions polynomiales

Définition. Une fonction polynomiale est une fonction de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où n est un entier naturel, et $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.
Si a_n est non-nul on dit que n est le degré de f.

Proposition. *Les fonctions polynomiales sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Leurs limites en $\pm\infty$ sont celles de leurs termes de plus haut degré.*

Remarque. Les fonctions de degré 0 sont les fonctions constantes non-nulles.
La fonction nulle est de degré $-\infty$.
Les fonctions de degré au plus 1 ($x \mapsto ax + b$) sont appelées fonctions affines.

Exemple 16. Tracé de quelques fonctions polynomiales.

B. Fonctions trigonométriques

1) Sinus et cosinus

Proposition. *Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. Elles sont dérivables, de dérivées* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$*.*

Démonstration. On connait les propriétés :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

La dérivabilité est conséquence de la propriété admise $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

Tracé.

▷ **Exercice 12.**

2) Tangente

Proposition. *La fonction tangente est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, *$\pi$-périodique et impaire. Elle est dérivable, de dérivée* $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. *Elle est strictement croissante sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Démonstration. On connait déjà les propriétés :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \tan(x+\pi) = \tan x \qquad \text{et} \qquad \tan(-x) = -\tan x \quad \square$$

Proposition. *Limites de la fonction tangente :*

Tracé. Par périodicité et parité on peut restreindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

▷ **Exercice 13.**

3) Limites usuelles

Proposition.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} =$$

Démonstration.

C. Logarithmes

1) Logarithme népérien

Définition. La fonction logarithme népérien (John Napier, Écosse, 1550 – 1617) est la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Remarque. En conséquence du théorème fondamental de l'analyse, cette fonction est dérivable et sa dérivée est : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
De plus $\ln(1) = 0$.

Proposition. *Pour tout* $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ *:* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Corollaire. *Pour tout* $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ *et* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

Démonstration.

Démonstration du corollaire.

Proposition. *La fonction* ln *est strictement croissante, ses limites sont :*

Démonstration.

Tracé. La tangente à la courbe en $x_0 = 1$ admet pour équation $y = x - 1$.

Proposition. *Limites usuelles :*

Démonstration.

▷ **Exercices 14, 15.**

2) Logarithme de base 10

Définition. On appelle logarithme de base 10 la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

Pour éviter les ambiguïtés on peut noter $\log_{10}$ cette fonction.

Remarque. La dérivée de la fonction log est :

La fonction log est strictement croissante.

Elle vérifie les mêmes propriétés calculatoires et de limite.

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$:*

$$y = \log x \quad \Longleftrightarrow \quad x =$$

Exemple 17. Le logarithme décimal donne l'ordre de grandeur. Par exemple :

Si $\log x = 28{,}54$ alors

Remarque. On définit de même le logarithme de base a pour tout $a > 0$ distinct de 1 par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Le logarithme binaire sera utilisé en informatique.

D. Exponentielles

1) Fonction exponentielle

Remarque. Les variations et les limites de la fonction ln montrent que tout réel x possède un et un seul antécédent par cette fonction. On note $\exp(x)$ cet antécédent.

Définition. On appelle exponentielle la fonction réciproque de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

On note exp cette fonction. $\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \exp(x) \end{aligned}$

Par commodité on note plutôt $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mais on retient que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$

Remarque. Comme la fonction exp est la réciproque de la fonction ln alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad y = \exp(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln y$$

Notation. On note e l'antécédent de 1 par la fonction logarithme népérien.

Alors $\ln e = 1$, donc $e = \exp(1)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(e^n) = n$, donc $e^n = \exp(n)$.

On note alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

Remarque. Le nombre e est *irrationnel* et même *transcendant*, il est approximativement égal à $e \simeq 2{,}718\,281\,828\,459$...

Proposition. *Pour tous réels x et y :*

$e^{x+y} =$ $e^{x-y} =$ $e^{-x} =$

Démonstration.

Remarque. Par construction la fonction exponentielle est strictement positive :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x > 0$$

De plus elle est strictement croissante et ses limites sont :

Proposition. *La fonction exponentielle est dérivable, égale à sa propre dérivée.*

Démonstration. Admise pour l'instant. □

Tracé. La tangente à la courbe de l'exponentielle en 0 admet pour équation $y = x + 1$.

Proposition. *Limite usuelle :*

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable en 0 de dérivée 1. Ceci donne exactement l'égalité ci-dessus. □

2) Puissances

Définition. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ on note :

On définit ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^α. Cette fonction est appelée fonction puissance α.

Proposition. *Pour tous $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:*

$x^\alpha y^\alpha =$ $\qquad$ $x^\alpha x^\beta =$ $\qquad$ $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} =$ $\qquad$ $(x^\alpha)^\beta =$

Démonstration. Tout se calcule avec la formule $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle. $\square$

Proposition. *La fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$*

Démonstration.

Corollaire. *La fonction puissance α est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$.*

Tracé.

Remarque. Si α est strictement positif, on prolonge la fonction à $\mathbb{R}_+$ en posant $0^\alpha = 0$. Si α est entier positif, on la prolonge à $\mathbb{R}$ et si α est entier négatif on la prolonge à $\mathbb{R}^*$.

▷ **Exercice 16.**

Remarque. Ne pas confondre les fonctions puissances : $x \mapsto x^\alpha$ avec les fonctions exponentielles de base a : $x \mapsto a^x$. Celles-ci sont définies sur $\mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

E. Croissances comparées

Théorème (Croissances comparées). *Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:*

$\lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} =$ $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} =$

Remarque. En particulier

$\lim_{x\to 0} x \ln x =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =$ $\lim_{x\to-\infty} x e^x =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} =$

Démonstration. Limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$:

Démonstration (suite).

Ensuite on écrit

$$\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

Ceci permet de démontrer le deuxième résultat. Le premier s'obtient en écrivant

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \left|\ln \frac{1}{y}\right|^\beta = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln^\beta y}{y^\alpha} = 0$$

Les deux derniers résultats s'obtiennent en posant $y = e^x$. □

Exemple 18. Calculer : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}$.

F. Études de fonctions

Plan d'une étude de fonction :

- Détermination de l'ensemble de définition (si l'ensemble de départ n'est pas donné).
- Réduction de l'ensemble d'étude grâce à la périodicité et à la parité.
- Continuité, dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée. Éventuellement construction du tableau de variations.
- Limites aux bornes, étude des branches infinies (asymptotes éventuelles).
- Tracé.

Exemple 19. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$

Définition. Si f admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en un réel b, alors on dit que la droite d'équation $x = b$ est asymptote à la courbe de f.

Si f admet une limite finie a en $+\infty$ ou $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe de f.

Si $f(x) - (ax+b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f.

Exemple 20. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leqslant x - 1$

▷ **Exercice 17.**

Exemple 21. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x \sin x}$

Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

▷ **Exercice 18.**