

Chapitre A3

Fonctions d'une variable réelle

I. Généralités sur les réels

A. La relation d'ordre sur \mathbb{R}

Définition. L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre notée \leq .

Proposition. La relation d'ordre sur \mathbb{R} est compatible à la somme et à la multiplication par un réel positif. En d'autres termes, pour tous réels a, b, c, d :

$$\begin{aligned}
 a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d &\implies a + c \leq b + d \\
 \text{et} \quad 0 \leq a \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq c \leq d &\implies 0 \leq ac \leq bd
 \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned}
 a \leq 0 \quad \text{et} \quad b \leq c &\implies ab \geq ac \\
 0 < a \leq b &\implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \\
 \text{et} \quad a \leq b < 0 &\implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0
 \end{aligned}$$

Proposition. Soit a_1, \dots, a_n des réels positifs.

	Si	$\sum_{k=1}^n a_k = 0$	alors	
--	----	------------------------	-------	--

Proposition. Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

	Si	$n > m$	alors	
--	----	---------	-------	--

B. Intervalles

Définition. On appelle intervalle une partie I de \mathbb{R} vérifiant :

Exemples.

Sont des intervalles :	
Ne sont pas des intervalles :	

(iv) Soit A une partie de \mathbb{R} . La fonction

$$\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est appelée fonction indicatrice de l'ensemble A .

B. Opérations

On note pour toute la suite D, E, F des parties de \mathbb{R} .

Définition. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions, alors $(f + g)$ et fg sont les fonctions de D dans \mathbb{R} définies par :

$$\forall x \in D \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

On définit également les fonctions λf (où λ est un réel), $f - g$, $\frac{f}{g}$ si g est à valeurs non-nulles.

Définition. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subseteq E$.

On note $g \circ f$ et on appelle composée de f et de g la fonction :

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

Remarque. La composée de f et de g est définie si et seulement si $f(D) \subseteq E$, *i.e.*, :

$$\forall x \in D \quad f(x) \in E$$

Exemple 3. Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Sur quel ensemble est définie $g \circ f$?

Exemple 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

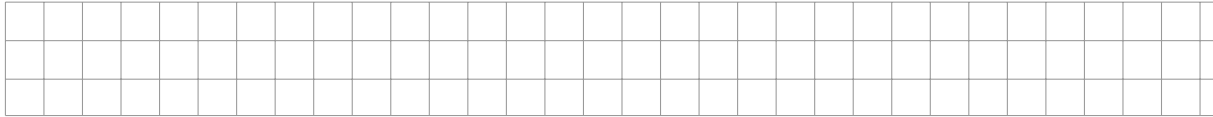
Exemple 5. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Alors

$\text{Id}_F \circ f =$	$f \circ \text{Id}_E =$

D. Extrema

Définition. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est majorée, respectivement minorée, bornée si la partie $f(D)$ de \mathbb{R} est majorée, respectivement minorée, bornée.

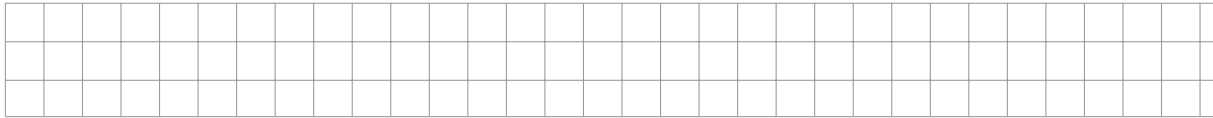
Remarque. En d'autres termes, la fonction f est majorée si :



Graphiquement, ceci signifie que la courbe de f est en-dessous de la droite d'équation $y = M$.

Remarque. La fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

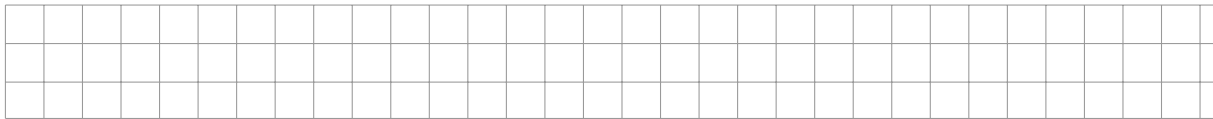
Définition. La fonction f admet un maximum sur D si il existe $x_0 \in D$ tel que $f(x_0)$ soit un majorant de f sur D :



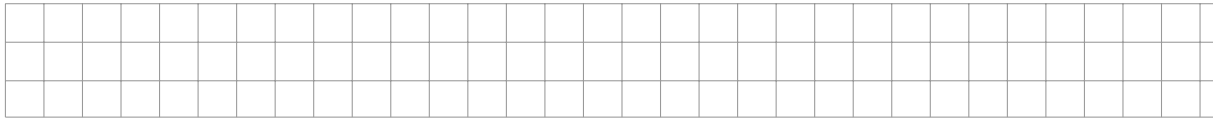
Dans ce cas $f(x_0)$ est le maximum de l'ensemble $f(D)$.

On définit de même le minimum de f sur D .

Notation. S'il existe le maximum de f sur D est noté :



S'il existe le minimum est noté :



Exemple 8. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Alors la fonction f est minorée mais elle n'admet pas de minimum.

III. Dérivation

A. Définitions

Rappel sur les droites du plan.

- L'équation d'une droite est de la forme $y = ax + b$ ou $x = b$.
- Le vecteur de coordonnées $(1, a)$ ou $(0, 1)$ est directeur de la droite.
- Pour tracer la droite d'équation $y = ax + b$ on place le point $(0, b)$ puis on utilise le vecteur directeur.
- Si deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont donnés, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. La valeur de b est calculée ensuite.

▷ Exercices 4, 5.

On note toujours D une partie de \mathbb{R} .

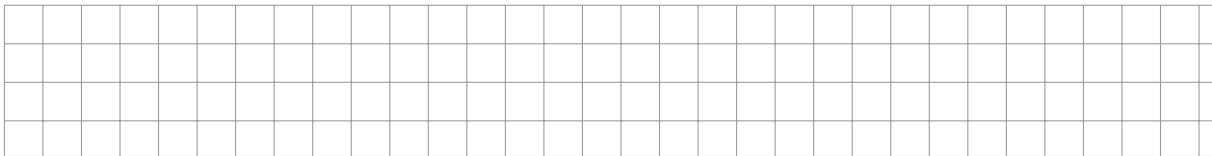
Définition. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et x_0 un élément de D . On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

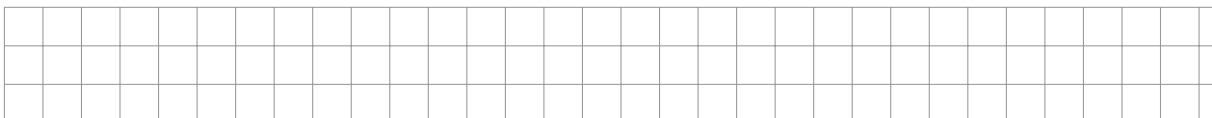


On note alors :



Ce réel est appelé nombre dérivé de f en x_0 .

Proposition. La tangente à la courbe \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse x_0 admet pour équation :



Définition. On dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable ou dérivable sur D si elle est dérivable en tout point x_0 de D .

Dans ce cas la fonction $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée dérivée de f .

$$x \mapsto f'(x)$$

Proposition. Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition sauf :

- La fonction racine carrée qui est définie (et continue) sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction valeur absolue qui est définie (et continue) sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* .
- Les fonctions arccos et arcsin qui sont définies (et continues) sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $] -1, 1[$.

Exemple 10. La fonction carré est dérivable.

▷ Exercices 6, 7.

B. Applications : croissance et extrema

Proposition. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors

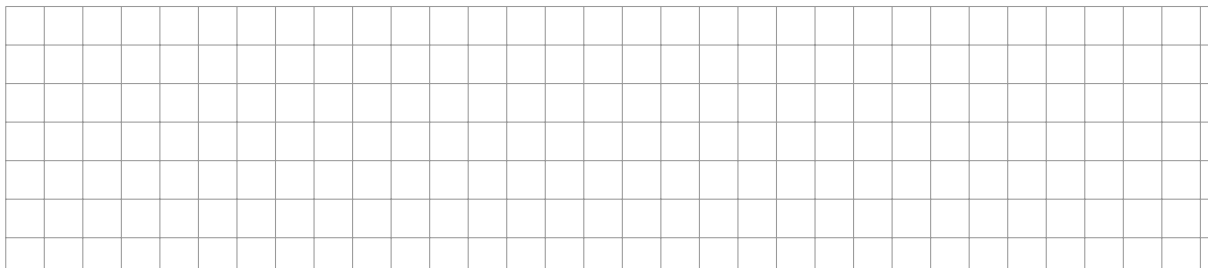
- f' est positive si et seulement si f est croissante.
- f' est négative si et seulement si f est décroissante.
- f' est nulle si et seulement si f est constante.
- Si f' est strictement positive alors f est strictement croissante.
- Si f' est strictement négative alors f est strictement décroissante.

Proposition. Avec les mêmes notations :

- Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.
- Si f' est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Démonstration du (i). Si f' est positive alors f est croissante.

Si f n'est pas strictement croissante alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.



Pour tout élément x de $[x_1, x_2]$, comme $x_1 \leq x \leq x_2$ alors par croissance $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$. Ainsi f est constante sur $[x_1, x_2]$, donc sa dérivée y est nulle. Or l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient une infinité de points, ce qui constitue une contradiction. \square

Corollaire. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Si $f' = g'$ alors il existe une constante K telle que $f = g + K$, i.e.,

$$\forall x \in I \quad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. On pose $h = f - g$. La fonction h est dérivable par soustraction, f et g étant dérivables. De plus par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in I \quad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Ainsi h' est nulle sur l'intervalle I , donc h est constante sur cet intervalle. Il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in I \quad h(x) = K$$

Ceci donne $f(x) = g(x) + K$ pour tout $x \in I$. □

Remarque. Les propriétés précédentes ne sont valables que sur un intervalle !

Exemple 11. La fonction $\operatorname{sgn} : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ est définie sur \mathbb{R}^* . Elle est dérivable, de dérivée nulle, mais pas constante.

Corollaire. Soit f une fonction dérivable sur une partie D de \mathbb{R} . Si f' est positive (respectivement négative, nulle) alors f est croissante (respectivement décroissante, constante) sur tout intervalle de D .

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et x_0 un point intérieur de I , i.e., tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq I$.

Si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

<u>Démonstration.</u>																						

Remarques.

- (i) Le tableau de variations d'une fonction est construit en étudiant le signe de sa dérivée. Les points où celle-ci est nulle sont des extrema potentiels, les variations permettent de décider s'ils sont effectivement des extrema et leur nature.
- (ii) La réciproque de cette proposition est fausse.

Exemple 12. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

C. Dérivées usuelles**Proposition (Dérivées des fonctions usuelles).**

<i>Fonction</i>	\mathcal{D}	\mathcal{D}'	<i>Dérivée</i>	<i>Fonction</i>	\mathcal{D}	\mathcal{D}'	<i>Dérivée</i>
C				$\cos x$			
$x^n (n \in \mathbb{N})$				$\sin x$			
$\frac{1}{x}$				$\tan x$			
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$				$\arcsin x$			
\sqrt{x}				$\arccos x$			
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$				$\arctan x$			
$ x $				$\operatorname{ch} x$			
e^x				$\operatorname{sh} x$			
$\ln x$				$\operatorname{th} x$			

▷ **Exercice 8.**

Proposition. Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions composables (i.e., $u(D) \subseteq E$). Si u et v sont dérivables alors $v \circ u$ est dérivable et :

Exemple 13. Dériver les fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(2x) & f_2(x) &= e^{-x} & f_3(x) &= (4x - 3)^5 \\ f_4(x) &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) & f_5(x) &= \ln(\sin x) & f_6(x) &= \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Remarque. Si $f(x) = u(ax + b)$ alors $f'(x) = a u'(ax + b)$.

Autre cas particuliers :

$(e^u)'$ =	$(\ln u)'$ =	$\left(\frac{1}{u}\right)'$ =
\sqrt{u}' =	$(u^\alpha)'$ =	

Démonstration de la formule de dérivation du quotient $\frac{u}{v}$.

▷ **Exercice 9.**

Exemple 14. Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles définies ? dérivables ?

$$f(x) = \sqrt{4 - x} \qquad g(x) = x\sqrt{|x|}$$

▷ **Exercice 10.**

E. Dérivées n -èmes

Définition. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit par récurrence les dérivées n -èmes de f de la façon suivante.

On pose $f^{(0)} = f$ et on admet que toute fonction est dérivable 0 fois.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que f est dérivable n fois sur D si elle est dérivable $n - 1$ fois et si sa dérivée $(n - 1)$ -ème est dérivable. On note alors $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$ et on appelle dérivée n -ème de f sur D la fonction $f^{(n)}$.

Remarques.

- (i) En particulier $f^{(0)} = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$
- (ii) On note $f' = f^{(1)}$ $f'' = f^{(2)} = (f')'$ $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ etc.

Définition. Les fonctions $f^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont aussi appelées dérivées successives de f .

Exemple 15. Calcul des dérivées successives de :

$$f(x) = e^x \quad f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 12x + 1 \quad f(x) = \cos x$$

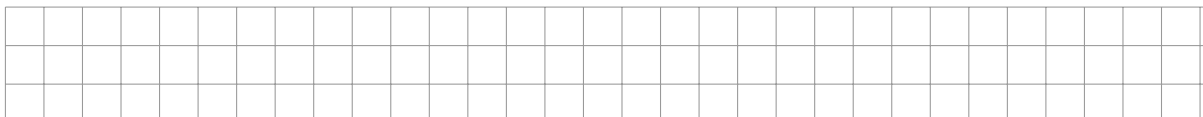
▷ **Exercice 11.**

IV. Continuité

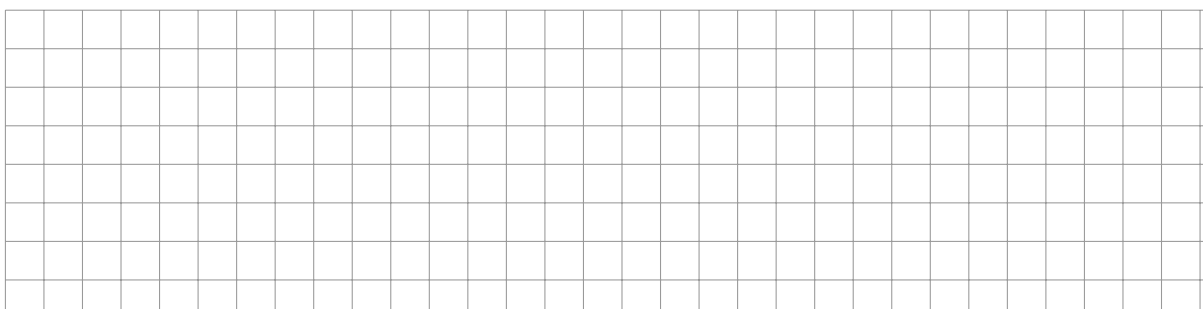
A. Définition

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} , et x_0 un point de D .

On dit que f est continue en x_0 si :



On dit que f est continue ou continue sur D si elle est continue en tout point de D .



Remarques.

- (i) Toutes les fonctions usuelles du programme sont continues sur leur ensemble de définition sauf la fonction partie entière.
- (ii) Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions continues sont continues.

Proposition. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

B. Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux points de I , tels que $a < b$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Corollaire. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démonstration du corollaire. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du corollaire. Soit d compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Comme f est continue alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c) = f(c') = d$.

Si $c < c'$ ou $c > c'$ alors $f(c) < f(c')$ ou $f(c) > f(c')$, ce qui est impossible car $f(c) = f(c')$. Donc $c = c'$.

Ceci démontre l'unicité du point c . □

V. Fonctions classiques**A. Fonctions polynomiales**

Définition. Une fonction polynomiale est une fonction de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

où n est un entier naturel, et a_0, \dots, a_n sont des réels.

Si a_n est non-nul on dit que n est le degré de f .

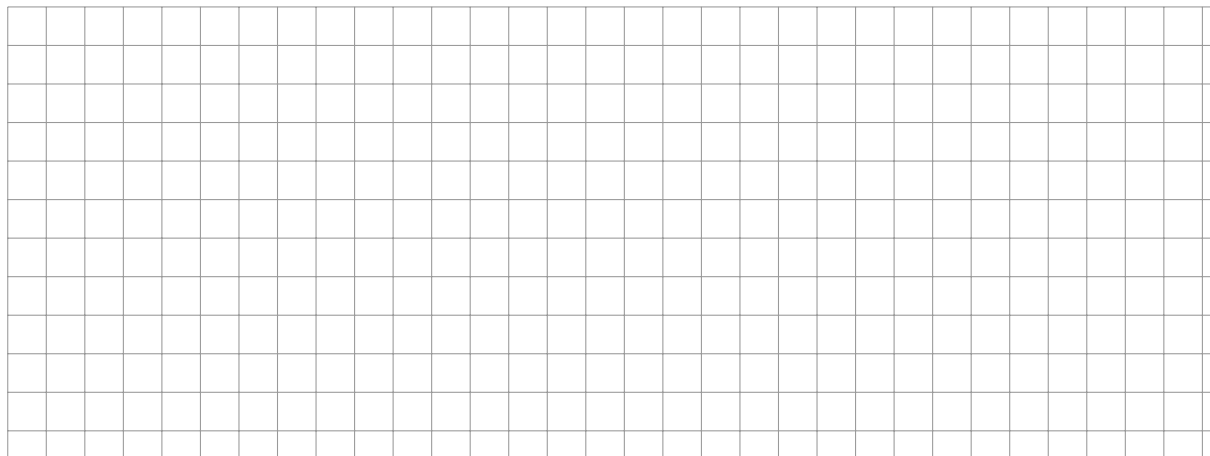
Proposition. Les fonctions polynomiales sont définies et dérivables sur \mathbb{R} . Leurs limites en $\pm\infty$ sont celles de leurs termes de plus haut degré.

Remarque. Les fonctions de degré 0 sont les fonctions constantes non-nulles.

La fonction nulle est de degré $-\infty$.

Les fonctions de degré au plus 1 ($x \mapsto ax + b$) sont appelées fonctions affines.

Exemple 16. Tracé de quelques fonctions polynomiales.



B. Fonctions trigonométriques1) Sinus et cosinus

Proposition. *Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur \mathbb{R} et 2π -périodiques. La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. Elles sont dérivables, de dérivées $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.*

Démonstration. On connaît les propriétés :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + 2\pi) &= \cos x & \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(-x) &= \cos x & \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

La dérivabilité est conséquence de la propriété admise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.



Tracé.



▷ **Exercice 12.**

2) Tangente

Proposition. La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, π -périodique et impaire. Elle est dérivable, de dérivée $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Elle est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Démonstration. On connaît déjà les propriétés :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{et} \quad \tan(-x) = -\tan x \quad \square$$

Proposition. Limites de la fonction tangente :

Tracé. Par périodicité et parité on peut restreindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

▷ **Exercice 13.**3) Limites usuelles

Proposition.

Démonstration.

C. Logarithmes

1) Logarithme népérien

Définition. La fonction logarithme népérien (John Napier, Écosse, 1550 – 1617) est la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Remarque. En conséquence du théorème fondamental de l'analyse, cette fonction est dérivable et sa dérivée est : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

De plus $\ln(1) = 0$.

Proposition. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

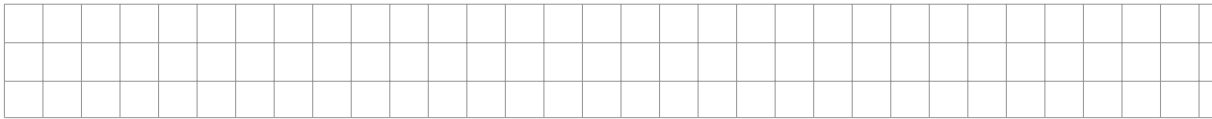
Corollaire. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{Z}$:

Démonstration.

Démonstration du corollaire.

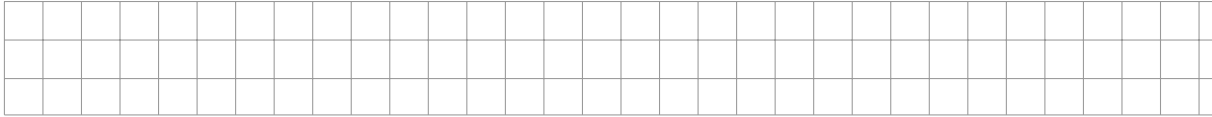
2) Logarithme de base 10

Définition. On appelle logarithme de base 10 la fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par :



Pour éviter les ambiguïtés on peut noter \log_{10} cette fonction.

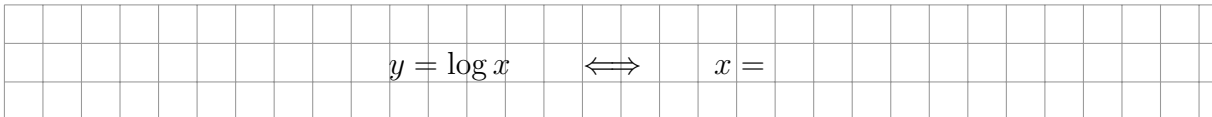
Remarque. La dérivée de la fonction \log est :



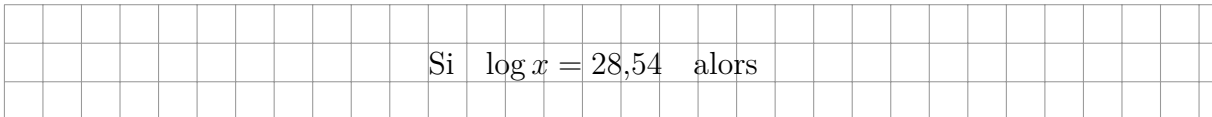
La fonction \log est strictement croissante.

Elle vérifie les mêmes propriétés calculatoires et de limite.

Proposition. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$:



Exemple 17. Le logarithme décimal donne l'ordre de grandeur. Par exemple :



Remarque. On définit de même le logarithme de base a pour tout $a > 0$ distinct de 1 par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Le logarithme binaire sera utilisé en informatique.

D. Exponentielles

1) Fonction exponentielle

Remarque. Les variations et les limites de la fonction \ln montrent que tout réel x possède un et un seul antécédent par cette fonction. On note $\exp(x)$ cet antécédent.

Définition. On appelle exponentielle la fonction réciproque de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

On note \exp cette fonction. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto \exp(x)$

Par commodité on note plutôt $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mais on retient que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$

Remarque. Comme la fonction \exp est la réciproque de la fonction \ln alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad y = \exp(x) \iff x = \ln y$$

Notation. On note e l'antécédent de 1 par la fonction logarithme népérien.

Alors $\ln e = 1$, donc $e = \exp(1)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(e^n) = n$, donc $e^n = \exp(n)$.

On note alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

Remarque. Le nombre e est *irrationnel* et même *transcendant*, il est approximativement égal à $e \simeq 2,718\ 281\ 828\ 459\dots$

Proposition. *Pour tous réels x et y :*

$e^{x+y} =$	$e^{x-y} =$	$e^{-x} =$
-------------	-------------	------------

Démonstration.

Remarque. Par construction la fonction exponentielle est strictement positive :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$$

De plus elle est strictement croissante et ses limites sont :

--

Proposition. *La fonction exponentielle est dérivable, égale à sa propre dérivée.*

Démonstration. Admise pour l'instant. □

Tracé. La tangente à la courbe de l'exponentielle en 0 admet pour équation $y = x + 1$.

--

Proposition. *Limite usuelle :*

--

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable en 0 de dérivée 1. Ceci donne exactement l'égalité ci-dessus. □

E. Croissances comparées

Théorème (Croissances comparées). *Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} =$$

Remarque. En particulier

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} =$$

Démonstration. Limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$:

Démonstration (suite).

Ensuite on écrit

$$\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha} \ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\beta \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta$$

Ceci permet de démontrer le deuxième résultat. Le premier s'obtient en écrivant

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \right)^\alpha \left| \ln \frac{1}{y} \right|^\beta = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta y}{y^\alpha} = 0$$

Les deux derniers résultats s'obtiennent en posant $y = e^x$. □

Exemple 18. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}$.

F. Études de fonctions**Plan d'une étude de fonction :**

- Détermination de l'ensemble de définition (si l'ensemble de départ n'est pas donné).
- Réduction de l'ensemble d'étude grâce à la périodicité et à la parité.
- Continuité, dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée. Éventuellement construction du tableau de variations.
- Limites aux bornes, étude des branches infinies (asymptotes éventuelles).
- Tracé.

Exemple 19. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

Définition. Si f admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en un réel b , alors on dit que la droite d'équation $x = b$ est asymptote à la courbe de f .

Si f admet une limite finie a en $+\infty$ ou $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe de f .

Si $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f .

Exemple 20. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : \ln x \leq x - 1$

▷ **Exercice 17.**

Exemple 21. On pose : $f(x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$

Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

▷ **Exercice 18.**