Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2023-2024**
MPSI – Mathématiques

Feuille de T. D. A3
Fonctions d'une variable réelle

Exercices de cours

1 On pose : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Démontrer que f est impaire.

2 Donner les périodes des fonctions suivantes.

$$f(x) = \tan\frac{x}{2} \qquad g(x) = \frac{\cos 4x}{\sin 6x}$$
$$h(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $(A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ et A, ω non-nuls.

3 Démontrer que la fonction
$$f : x \mapsto \cos x + \cos(\pi x)$$
n'est pas périodique.

4 Tracer les droites d'équations :
$$y = 3 - 2x \qquad y = \frac{x}{2} + 3 \qquad 2x - 5y = 1$$

5 Déterminer une équation de la droite passant par les points de coordonnées $(4, 5)$ et $(-1, 2)$, puis $(-1, 0)$ et $(6, -1)$.

6 Démontrer que la fonction inverse
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$
est dérivable sur son ensemble de définition et donner sa fonction dérivée.

7 Démontrer que la fonction racine carrée
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$
est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

8 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 15 \qquad f_2(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x}$$
$$f_3(x) = xe^x \qquad f_4(x) = \cos x \sin x$$
$$f_5(x) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \qquad f_6(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

9 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2) \qquad f_8(x) = \cos^2(3x)$$
$$f_9(x) = \ln((x+6)^2) \qquad f_{10}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$
$$f_{11}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad f_{12} = \frac{1}{(x^2 + 3x - 5)^2}$$

10 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :
$$f : x \mapsto \sqrt{x - x^2}$$
Sur quel ensemble est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

11 Soit $f(x) = \ln(x)$. Calculer f', f'', f'''.

Trouver une formule pour $f^{(n)}$ $(n > 0)$ et la démontrer.

12 Justifier que la courbe de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est une sinusoïde. Donner sa période et son amplitude.

Tracer son graphe ainsi que celui de la fonction cosinus sur un même graphique.

13 On pose $g(x) = 1 + \tan^2 x$.

Déterminer l'ensemble de définition de g, puis démontrer qu'on peut restreindre son étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer ses variations et ses limites, tracer sa courbe sur le graphique de l'exercice précédent.

14 Dériver et tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln|x|$.

15 Résoudre les équations suivantes.

a. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$

b. $|\ln x| = \left|\ln\left(x + \frac{8}{3}\right)\right|$

16 Résoudre les équations suivantes.

a. $4\left(\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[6]{x}\right) = 15\sqrt{x}$

b. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

17 Démontrer que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, puis que $x \leqslant \tan x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

18 Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^3 - x^4}$.

Travaux dirigés

1 Tracer sans étudier de fonction les courbes d'équations suivantes :

a. $y = 1 + \sin x$ b. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c. $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ d. $y = 2\sqrt{x+6} - 1$

e. $y = x\sin x$ f. $y = e^{-x}\cos x$

g. $y = 3 + 2|x| - x^2$ h. $y = 2 - |x^2 - 1|$

i. $y = |e^x - 1|$ j. $y = -\ln|x|$

2 On pose $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

a. Démontrer que $a^3 = 14 - 3a$.

b. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x - 14$ et en déduire la valeur de a.

3 Sur un échiquier (de 64 cases) on place un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite.

Combien de grains de riz obtient-on sur l'échiquier ? Combien de chiffres l'écriture décimale de ce nombre contient-elle, sachant que $\log 2 \simeq 0{,}301$?

4 À l'aide d'une calculatrice, donner l'écriture scientifique des réels :

$$a = 7777^{7777} \qquad b = e^{-100\,000} \qquad c = 1000!$$

Pour la dernière on écrira un programme `Python`.

5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

a. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

b. $2^{x^3} = 3^{x^2}$

c. $2^{1-x} + 3^{2x-1} = (\frac{1}{2})^x + 3^{2x+1}$

d. $\ln(2x+1) - 2\ln x = \ln(2x-1) - 2\ln(x-1)$

e. $e^{2\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}+1} - 2e^2 = 0$

f. $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln x - 1$

g. $e^{2x} + (a+1)e^x + 2(a-1) \leqslant 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.

6 a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geqslant x + 1$$

b. Étudier la position relative de la courbe de l'exponentielle et de celle de la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tracer ces courbes et leurs tangentes en 0.

c. En déduire que pour tout $x > 0$:

$$x - 1 \leqslant xe^{-\frac{1}{x}} \leqslant x - 1 + \frac{1}{2x}$$

7 Un commerçant dispose d'un disque de papier de rayon R, il souhaite en faire un cornet pour y mettre des frites. Pour ceci il enlève un quartier d'angle α et il joint les deux rayons découpés afin d'obtenir un cône.

Quel angle α doit-il choisir afin de pouvoir mettre le maximum de frites dans le cornet ? On exprimera ce rayon en degrés.

8 Étudier les fonctions suivantes.

a. $f(x) = \ln\left(2x - x^2\right)$ b. $f(x) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{x^2-3x}{x^2-3x+2}$

c. $f(x) = \dfrac{2\ln x + 3}{x}$ d. $f(x) = x(x^2-1)^2$

e. $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ f. $f(x) = (1+\cos x)\sin x$

g. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x+2}}{x+3}$ h. $f(x) = \cos^2 x - 3\cos x + 2$

i. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ j. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

k. $f(x) = x\ln x$ l. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

9 On note :

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+3}{x+1} - \ln(x+1)$$

a. Étudier la fonction g. Démontrer qu'elle s'annule en un unique point α et donner un encadrement de α d'amplitude 1.

b. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

c. Étudier la fonction f.

On donne $\ln 2 \simeq 0{,}7$ et $\ln 5 \simeq 1{,}6$.

10 On note $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f, ses variations et ses limites.

b. Justifier que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

c. Ce prolongement par continuité est-il dérivable ?

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

11 Déterminer le signe des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition.

a. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(x - \dfrac{2}{x} - 1\right)$ b. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} - 1$

c. $f(x) = x^2 - \ln^2 x - 1$

12 Démontrer les inégalités suivantes.

a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \qquad 0 < \dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (x+1)^{x+1} \geqslant (x+2)^x$.