Chapitre B1
Nombres complexes

I. Généralités

A. Nombres complexes

Définition. Soit i un nombre vérifiant $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + iy$ où x et y sont deux réels :

Ces nombres sont appelés nombres complexes.

Exemple.

Remarque.

(i) L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication.

(ii) Tout nombre complexe z possède un opposé $-z$.

(iii) Tout nombre complexe z non-nul possède un inverse $\frac{1}{z}$.

(iv) On définit ainsi également la soustraction et la division par un complexe non-nul.

Exemple.

Démonstration du *(iii)*. Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$. Alors $x^2 + y^2 \neq 0$ et :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

L'inverse de z est bien défini, et c'est un nombre complexe. $\square$

Définition. Soit $z = x + iy$ est un nombre complexe avec x et y réels. On dit alors que x est la partie réelle et y est la partie imaginaire de z.

On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Exemple.

$\mathrm{Re}(3+2i) =$ $\mathrm{Im}(3+2i) =$ $\mathrm{Re}(i) =$ $\mathrm{Im}(i) =$

Attention : $\mathrm{Im}(z)$ est réel.

Définition. Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ alors on dit que z est réel. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que z est imaginaire pur. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Définition. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On représente un nombre complexe $z = x+iy$ par le point M du plan de coordonnées (x, y). On dit que z est l'affixe de M, et M est l'image de z. On note alors M_z.

Les deux axes du repère sont l'axe des réels et l'axe des imaginaires purs.

Remarque. Si z et z' sont deux complexes, d'images M et M', alors $z + z'$ admet pour image le point M'' tel que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ admet pour affixe $z' - z$.

B. Conjugaison

Définition. Soit $z = x+iy$ un complexe. On appelle conjugué de z le complexe $\bar{z} = x-iy$.

Remarque. Les points images de z et de $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Exemple.

$\overline{4+3i} =$ $\overline{1-6i} =$ $\overline{5} =$ $\overline{7i} =$

Propositions.

(i) Pour tout complexe z : $\overline{\overline{z}} = z$ *(on dit que la conjugaison est une* *involution).*

(ii) Pour tous complexes z *et* z' :

$\overline{z+z'} =$ $\overline{z-z'} =$ $\overline{zz'} =$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$

en supposant que z' *est non-nul dans le dernier cas.*

En conséquence, pour tout complexe z *et tout entier naturel* n :

$\overline{nz} =$ $\overline{z^n} =$

Démonstration. Il suffit de tout écrire.

Proposition. *Pour tout complexe* z :

(i) $\operatorname{Re} z =$ *et* $\operatorname{Im} z =$

(ii) $z \in \mathbb{R} \iff$

$z \in i\mathbb{R} \iff$

Démonstration. Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

▷ **Exercice 1.**

C. Module

Définition. Soit z un nombre complexe. Le module de z est :

Si $z = x + iy$ avec x et y réels alors

Remarques.

(i) Le module est bien défini, c'est un réel positif.

(ii) Si z est réel alors son module coïncide avec sa valeur absolue.

(iii) Il représente la distance du point image M_z à l'origine.

Rappel. Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b. Alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

donc $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Proposition. *La distance de A à B est $|b - a|$.*

Définition. Soit A un point d'affixe a, r un réel positif. On définit :

- Le cercle de centre A et de rayon r : $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$
- Le disque ouvert de centre A et de rayon r : $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$
- Le disque fermé de centre A et de rayon r : $\overline{\mathcal{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$

Remarque. On dit que $\overline{\mathcal{D}}$ est l'union disjointe de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$: $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \varnothing$

Proposition. *Soit z et z' deux complexes, n un entier naturel. Alors*

Démonstration. (Exercice) Il suffit de tout écrire.

Proposition (Inégalité triangulaire). *Pour tous complexes z et z' :*

Remarque. En remplaçant z' par $-z'$ on obtient une autre inégalité triangulaire :

Lemme. *Pour tout nombre complexe z :*

$$\textit{(i)} \quad |\overline{z}| = |z| \qquad \textit{et} \qquad \textit{(ii)} \quad \begin{array}{l} -|z| \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant |z| \\ -|z| \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant |z| \end{array}$$

Démonstration.

(i) Il suffit d'écrire $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = |z|$.

(ii) On raisonne par équivalences successives, en utilisant la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \qquad -a \leqslant x \leqslant a \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leqslant a^2$$

appliquée à $a = |z|$. □

Démonstration de l'inégalité triangulaire.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_1, \ldots, z_n$ des complexes. Alors :*

Démonstration. Par récurrence sur n. □

II. Angles

A. L'ensemble $\mathbb{U}$

Notation. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

Remarque. L'ensemble des images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.
Soit z un élément de $\mathbb{U}$, M son image, et θ une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. Alors :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ceci justifie la proposition suivante :

Proposition. *Soit x et y deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.*

Définition. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on pose

$$e^{i\theta} =$$

Ainsi $\mathbb{U}$ est l'ensemble des $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$:

Proposition. *Pour tous réels θ et θ' :* $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

Démonstration. Ceci est conséquence des formules de somme de trigonométrie. $\square$

B. Argument

Remarque. Soit z un nombre complexe non-nul. Soit r son module.
Alors $\frac{z}{r}$ est bien défini, car r est non-nul. De plus il est de module 1 car $\left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{r} = 1$.
Ceci montre que $\frac{z}{r}$ appartient à $\mathbb{U}$ et ainsi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{z}{r} = e^{i\theta}$
Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z = re^{i\theta}$

Définition. Soit z un complexe non-nul, et r son module. Un argument de z est un réel θ tel que $z = re^{i\theta}$. On note alors $\theta = \arg z$.

Remarques. La notation $\arg z$ est dangereuse car l'argument est défini à 2π près. On peut avoir par exemple en même temps $\arg z = \frac{\pi}{6}$ et $\arg z = \frac{13\pi}{6}$.
On dit alors que $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z.

Proposition. *Le module d'un complexe est unique, alors que son argument est défini à 2π près. En d'autres termes :*
Soit r et r' sont deux réels strictement positifs et θ et θ' sont deux réels. Alors :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = r' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta' = \theta + 2k\pi$$

Définition. Soit $z = x + iy = re^{i\theta}$ un complexe, avec x, y, r, θ réels, r strictement positif. On dit que l'écriture $z = x + iy$ est la forme algébrique de z alors que l'écriture $z = re^{i\theta}$ est sa forme exponentielle.

Proposition (Passage d'une forme à l'autre). *Avec les notations de la définition précédente :*

▷ **Exercices 2, 3.**

Proposition. *Soit z et z' deux complexes non-nuls, n un entier. Alors à 2π près :*

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \qquad arg(z^n) = n \arg z$$

Démonstration. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors :

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \qquad \text{donc} \qquad \arg(zz') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z'$$

Les autres formules se démontrent de la même façon. □

Visions géométrique de la multiplication et de l'inversion.

C. Aspect dynamique

Définitions.

(i) Soit b un complexe. Alors l'application $z \mapsto z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe b.

(ii) Soit k un réel non-nul. Alors l'application $z \mapsto kz$ est l'homothétie de centre O et de rapport k.

(iii) Soit θ un réel. Alors l'application $z \mapsto e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.

(iv) L'application $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie d'axe (Ox).

Remarque. Soit a un complexe non-nul, de forme exponentielle $a = re^{i\theta}$.
Alors l'application $z \mapsto az$ est la composée de la rotation de centre O et d'angle θ avec l'homothétie de centre O et de rapport r.

Définition. Soit a et b deux complexes, a étant non-nul. L'application $f : z \mapsto az + b$ est appelée similitude directe du plan.

D. Applications à la trigonométrie

Rappel. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Exemple 1. Calcul de $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

▷ **Exercice 4.**

Proposition (Formules d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Démonstration. En effet : $\cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2}$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

De même : $\sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i}$ □

Exemple 2 (Linéarisation).

(i) Linéariser $\cos^3 t \, \sin t$ et calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, \sin t \, dt$

(ii) Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, \cos 3t \, \sin 4t \, dt$

▷ **Exercice 5.**

Exemple 3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, si bien que $t = \tan\frac{x}{2}$ existe.
Alors $e^{i\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{2}(1 + it)$, on élève au carré, on retrouve des formules connues.

Exemple 4 (Factorisation par l'angle moitié, ou par l'angle moyen). Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$1 + e^{i\theta} =$

Soit p et q deux réels.

$e^{ip} + e^{iq} =$

Ceci permet de retrouver les formules de transformation de somme en produit.

Exemple 5. Soit θ un réel non multiple de 2π. Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$.

Proposition (Transformation de Fresnel). *(Augustin* Fresnel, *France, 1788 – 1827)*
Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = a\cos t + b\sin t$$

Alors il existe deux réels A et φ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = A\cos(t - \varphi)$$

Démonstration. On divise $f(t)$ par $A = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{f(t)}{A} = a'\cos t + b'\sin t \qquad \text{avec} \qquad a' = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad b' = \frac{b}{A}$$

Comme $a'^2 + b'^2 = 1$, alors il existe un réel φ tel que $a' = \cos\varphi$ et $b' = \sin\varphi$, d'où le résultat.

D'un autre point de vue on peut poser $z = a + ib$, puis $A = |z|$ et $\varphi = \arg z$. On obtient :

$$f(t) = A\cos\varphi\cos t + A\sin\varphi\sin t = A\cos(t - \varphi)$$ □

Exemple 6. Résoudre : $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

▷ **Exercice 6.**

E. Applications à la géométrie du plan

Lemme. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs, d'affixes non-nulles z et z'. Alors le complexe $\frac{z'}{z}$ admet pour argument une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{u}')$.*

Démonstration. Soit $a = \frac{z'}{z}$ et soit $a = re^{i\theta}$ sa forme exponentielle.

Alors $z' = re^{i\theta}z$, donc $\arg z' = (\arg z) + \theta$.

Ceci montre que l'angle $(\vec{u}, \vec{u}')$ est de mesure θ. □

Proposition. *Soit A, B, C, D quatre points du plan, d'affixes respectives a, b, c, d, avec $a \neq b$ et $c \neq d$. Alors $\frac{d-c}{b-a}$ admet*

- *pour argument une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$,*
- *pour module le quotient $\frac{CD}{AB}$.*

Corollaire. *Avec les mêmes notations :*

(i) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est réel.

(ii) Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur.

(iii) Les longueurs AB et CD sont égales si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ appartient à $\mathbb{U}$.

Exemple 7. Soit A, B, C trois points distincts. Alors :

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a} \in$
Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a} \in$
Le triangle ABC est isocèle ($AB = AC$) si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a} \in$
Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si	$\dfrac{c-a}{b-a}$

▷ **Exercice 7.**

III. Équations algébriques

A. Équations du second degré

Lemme. *Tout nombre complexe non-nul possède exactement deux racines carrées distinctes.*

Démonstration. Soit $a = re^{i\theta}$ un complexe non nul. Soit $z = se^{i\varphi}$ une racine carrée de a. Alors $z^2 = a$, ce qui donne

$$s^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta}$$

donc $\quad s^2 = r \quad$ et $\quad 2\varphi = \theta + 2k\pi \quad$ où $\quad k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $\quad s = \sqrt{r} \quad$ et $\quad \varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi$.

Ceci montre que $z = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $z = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$: on a obtenu deux solutions distinctes, donc il existe exactement deux racines carrées de a. □

Théorème. *Soit a, b, c trois complexes, avec a non-nul. On note (C) l'équation :*

$$az^2 + bz + c = 0$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appelle discriminant de l'équation (C).
Soit η une racine carrée de Δ. Alors l'équation (C) admet pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b+\eta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\eta}{2a}$$

Ces solutions sont égales si et seulement si $\Delta = 0$.

Remarque. On ne peut pas écrire $\sqrt{\Delta}$ si Δ n'est pas un réel positif.

Démonstration. On utilise la forme canonique d'une expression du second degré :

Exemple 8. Résoudre l'équation : $z^2 - (3-8i)z - (13+11i) = 0$

Proposition. *Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ alors :*

$z_1 + z_2 =$ *et* $z_1 z_2 =$

Démonstration.

Remarque. Il arrive que l'on puisse deviner une racine carrée du discriminant.

Exemple 9. Donner une racine carrée des complexes suivants :

$\Delta_1 = -4 \qquad \Delta_2 = 5 \qquad \Delta_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Delta_4 = 2i \qquad \Delta_5 = -i \qquad \Delta_6 = -2 - 2i\sqrt{3}$

▷ **Exercice 8.**

B. Racines de l'unité

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions distinctes.*

Définition. Ces n solutions sont appelées racines n-èmes de l'unité. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$:

Démonstration. Tout complexe r possède une unique écriture $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. L'équation $z^n = 1$ s'écrit :

$$r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

ce qui donne $r^n = 1$ et $n\theta = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, et donc $r = 1$ et $\theta = k\frac{2\pi}{n}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

L'encadrement $0 \leqslant \theta < 2\pi$ donne $0 \leqslant k < n$.

Les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, \dots, n-1$ sont donc les éléments de $\mathbb{U}_n$, ils sont au nombre de n. □

Proposition.

$\mathbb{U}_n =$

Exemple 10. Représentation graphique de $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Remarque. Les racines n-èmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

De plus, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ est stable par multiplication et passage à l'inverse.

▷ **Exercice 9.**

Théorème. *La sommes des racines n-èmes de l'unité est nulle si $n > 1$. Leur produit vaut 1 si n est impair, -1 sinon.*

Démonstration. (Une autre méthode viendra au chapitre sur les polynômes.)

C. Racines n-èmes

Rappel : racines n-èmes dans $\mathbb{R}$.

Soit a un réel non-nul. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution si n est impair. Si n est pair elle en admet deux si a est positif et aucune si a est négatif.

Si a est supposé positif, alors l'équation $x^n = a$ admet une et une seule solution positive, que l'on appelle racine n-ème de a et que l'on note $\sqrt[n]{a}$.

Proposition. *Soit a un complexe non-nul et n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors a admet exactement n racines n-èmes distinctes.*

Démonstration.

Méthode. Pour obtenir les racines n-èmes de $a \in \mathbb{C}^*$:

(i) On écrit $a = re^{i\theta}$. Alors une racine n-ème de a est $b = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$.

(ii) Les racines n-èmes de a sont les complexes $b\zeta$ où $\zeta \in \mathbb{U}_n$.

Exemple 11. Résoudre l'équation : $z^3 = 8i$

Remarque. Les solutions forment encore un polygone régulier à n côtés, mais il n'est pas en général inscrit dans le cercle trigonométrique.

▷ **Exercice 10.**

IV. L'exponentielle complexe

Définition. Soit $z = x + iy$ un complexe, avec x et y réels. On note

$$e^z =$$

et on appelle exponentielle de z ce complexe.

Remarque. Ceci définit une fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Propositions.

(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $e^z \neq 0$

(ii) Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$: $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ *et* $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$

(iii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

(iv) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$: $|e^z| = e^x$ *et* $\arg(e^z) = y$

Cette dernière proposition montre que la forme algébrique de z donne la forme exponentielle de e^z.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Proposition. *Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle. En d'autres termes l'application* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est surjective.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors on peut écrire $z = re^{i\theta}$ avec r strictement positif, donc $z = e^a$ avec $a = \ln r + i\theta$. □

Proposition. *Soit z et z' deux complexes. Alors $e^z = e^{z'}$ si et seulement si il existe un entier k tel que $z = z' + 2ik\pi$.*

Remarque. Ceci montre que l'on n'a pas unicité de l'antécédent : l'application n'est pas injective, *i.e.*, l'égalité $e^z = e^{z'}$ n'implique pas que $z = z'$.

▷ **Exercice 11.**